풀수록 재미나는

수학문제풀이

2

$1+2+3+\cdots+10+11=66$

11
1
7 10
5 2
6
4 3
8 9

외국문도서출판사

주체94(2005)년

차 례

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였습니다.

《수학교육을 강화하는것은 자라나는 새세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

위대한 령도자 **김정일**원수님께서 가르치신바와 같이 수학학습을 잘하는것은 자연과학학습은 물론 사회현상을 옳게 관찰하고 분석추리하여 결론을 찾을수 있게 하는 사고능력을 키우는데서 매우 중요한 역할을 합니다.

우리가 살고있는 21세기는 과학과 기술의 시대로서 누구나 풍부한 지식과 높은 기술을 소유하여야만 강성대국건설에 이바지할수 있습니다.

지식이 없이는 시대의 이 요구에 발을 맞출수 없습니다. 높은 지식을 소유하자면 의식적인 학습과 꾸준한 노력이 필요합니다.

우리는 수학적지능을 체계적으로 키울수 있도록 《풀수록 재미나는 수학문제풀이 1》을 출판한데 이어 《풀수록 재미나는 수학문제풀이 2》를 출판하려고 합니다.

이 책에서는 학생소년들의 수학적지능, 론리적사고에 도움을 줄수 있는 재미나는 수학문제들과 교과서에서 배운 내용외에 새로운 내용을 담고있는 문제들, 수수께끼를 어떻게 풀겠는가, 현실과 수학은 어떻게 련결되여 우리에게 어떤 도움을 가져다주는가에 대한 설명을 주었습니다.

이 책을 독자들이 리용하면서 지식의 탑을 한층 더 높여나가기를 바랍니다.

제1절. 산수식의 빈칸채우기

산수에서 말하는 《계산》이란 산수식에 들어있는 수, 넉셈부호 및 넉셈순서에 의하여 산수식의 결과를 구하는 것을 의미합니다. 완성되지 못한 산수식을 제시하고 이 산수식에서 빠진 수, 빠진 넉셈부호를 찾아 산수식이 성립되게 하는 문제도 아주 흥미가 있는 문제입니다. 이러한 산수식을 바로 잡으려면 넉셈법칙을 잘 써먹을줄 알아야 하고 옹근수의 성질도 잘 리용하여야 합니다. 이 절에서는 이런 문제를 푸는 기본방법에 대하여 학습합니다.

실례 1. 다음의 곱하기산수식에서 빈칸에 알맞는 수들을 써넣어 산수식이 성립되게 하십시오.

따져보기와 풀기

어느 빈칸부터 채워야 하겠는지 생각해봅시다. 이 산수식에서는 두개의 곱하는수를 결정해야 합니다.

곱해질수를 $ab5$, 곱하는수를 $1cd$ 로 표시합시다(여기서 $ab5$는 백의 자리수가 a, 열의 자리수가 b, 하나자리수가 5인 세자리수를 표시합니다).

이때 주어진 산수식은 다음과 같이 됩니다.

곱하기의 법칙에 따라 다음과 같은 관계가 성립합니다.

$ab5$ × d = 2 □□5 …… 첫번째 부분적

$ab5$ × c = 1 3 □0 …… 두번째 부분적

$ab5$ × 1 =□□□ …… 세번째 부분적

이로부터 첫번째 부분적 2□□5 = 2□75 라는것을 알 수 있습니다. 그것의 하나자리수가 5이므로 d는 홀수만을 취할수 있습니다. 그리고 수 1은 취할수 없습니다. 즉 d = 3, 5, 7, 9여야 합니다.

두번째 부분적 13□0의 하나자리수가 0이므로 c는 짝수만을 취할수 있습니다. 즉 c = 2, 4, 6, 8 입니다.

적의 높은 자리수가 4이므로 세번째 부분적의 높은 자리수는 2 또는 3이여야 합니다. 즉 a는 2 또는 3이여야 합니다.

이제 a가 가질수 있는 값을 따져봅시다.

(1) 만일 a = 2이면 첫번째 부분적의 산수식은 $2b5 \times d$ = 2□75 로 바뀝니다. 이 산수식으로부터 b = 7, d = 9가 얻어집니다. 즉 275×9=2475로 됩니다. 이때 두번째 부분적의 산수식은 275 × c =13□0으로 바뀝니다. 계산한 결과 c가 어떤 값을 가지는가에 관계없이 이 같기식은 성립할수 없습니다.이것은 a로 수 2를 취할수 없다는것을 보여줍니다.

(2) 만일 $a = 3$이면 첫번째 부분적의 산수식은 $3b5 \times d = 2\square75$로 바뀌웁니다. 이 산수식으로부터 $b = 2$, $d = 7$이라는것을 알수 있습니다. 즉 $325 \times 7 = 2275$로 됩니다. 이때 두번째 부분적의 산수식은 $325 \times c = 13\square0$으로 바뀌웁니다. 계산하면 $c = 4$임을 알수 있습니다. 따라서 $325 \times 4 = 1300$이 됩니다. 그러므로 곱해질수 $ab5 = 325$, 곱하는수 $1cd = 147$이 얻어집니다. 이렇게 나머지 빈칸도 곱하기식의 법칙에 따라 쉽게 채울수 있습니다. 답은 다음과 같습니다.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & \boxed{3} & \boxed{2} & 5 \\
\times & & & 1 & \boxed{4} & \boxed{7} \\
\hline
 & & 2 & \boxed{2} & \boxed{7} & 5 \\
 & 1 & 3 & \boxed{0} & 0 & \\
 & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{5} & & \\
\hline
 & 4 & \boxed{7} & 7 & 7 & 5
\end{array}
$$

이 실례를 통하여 알수 있는바와 같이 산수식의 빈칸에 알맞는 수를 써넣을 때 깊이 생각하고 따져본데 기초하여 알맞는 수를 찾아야 합니다. 생각하고 따져볼 때 다음과 같은 몇가지 문제들에 주의를 돌려야 합니다.

(1) 산수식의 특성과 그 수량관계를 잘 따져보아야 합니다. 이것은 빈칸에 써넣어야 할 수를 결정하는데서 기초로 됩니다.

(2) 풀이의 기본열쇠를 잘 선택하여야 합니다. 우의 실례로부터 알수 있는바와 같이 빈칸에 알맞는 수를 써넣을 때 곱해질수와 곱하는수가운데 있는 빈칸을 문제풀이의 기본열쇠로 선택하여야 합니다.

(3) 빈칸에 써넣을 수가 가질수 있는 값범위를 정하고 이 값들을 산수식에 넣어보면서 값을 찾아야 합니다.

실례 2. 다음의 나누기산수식에서 빈칸에 알맞는 수를 써넣어 산수식이 성립되게 하십시오.

따져보기와 풀기

(1) 상을 AB, 나누는수를 $6CD$라고 하면 주어진 산수식은 다음과 같이 됩니다.

나누기의 법칙에 의하여

$6CD\times A=\square\square 7$ ①

$6CD\times B=\square\square 74$ ②

(2) 나누일수 = 상×나누는수이므로 먼저 상과 나누는수를 결정할수 있으면 나누일수는 곧 결정됩니다. 다시 나누기의 법칙에 의하여 나머지 빈칸의 수도 쉽게 결정할수 있습니다. 그러므로 여기서 기본은 상과 나누는수를 결정하는것입니다.

(3) 풀이를 결정합니다.

①식 $6CD \times A = \square\square 7$ 로부터 $A = 1, D = 7$이 얻어집니다.

②식 $6C7 \times B = \square\square 74$로부터 $B = 2$이 얻어집니다.

따라서 상은 AB = 12입니다.

②식 $6C7 \times B = \square\square 74$로부터 $C = 3$ 또는 $C = 8$이라는것도 알수 있습니다.

$C = 3$일 때 나누는수는 $6C7 = 637$이 되고 이때 $637 \times 2 = 1274$가 됩니다. 이것은 문제의 조건을 만족시킵니다.

$C = 8$일 때 나누는수는 $6C7 = 687$이 되고 $687 \times 2 = 1374$가 되므로 역시 문제의 조건을 만족시킵니다. 그러므로 나누는수는 637 또는 687입니다.

나누는수가 637일 때 나누일수는 $12 \times 637 = 7,644$가 됩니다.

나누는수가 687일 때 나누일수는 $12 \times 687 = 8,244$가 됩니다.

나누일수와 나누는수가 결정되면 나머지 빈칸의 수들은 쉽게 구할수 있습니다.

이 문제의 답은 다음과 같습니다.

실례 2로부터 다음과 같은 사실을 알수 있습니다.

① 나누기식의 빈칸의 수를 구할 때 상과 나누는수를 풀이의 기본열쇠로 선택할수 있습니다.

② 문제의 답은 여러개일수 있습니다. 앞으로 특별히

강조하지 않으면 한개의 답만 구하면 됩니다.

실례 3. 다음 산수식의 빈칸에 알맞는 수를 써넣어 산수식이 성립되게 하십시오.

따져보기와 풀기

이 산수식에서는 수 8이 한개 주어져있습니다. 빈칸에 써넣어야 할 수가 많을수록 더 풀기 어렵습니다.

상을 $a8b$, 나누는수를 xyz 라고 하면 산수식은 다음과 같이 됩니다.

산수식가운데서 수량관계와 풀이의 기본열쇠를 찾아봅시다.

① $\overline{xyz} \times 8 = \square\square\square$ (산수식의 네번째 행)이고 이것들의 적은 세자리수이므로 $x = 1$입니다.

② $\overline{xyz} \times a = \square\square\square\square$ (산수식의 두번째 행)이고 적이 네자리수이며 $\overline{xyz} \times 8 = \square\square\square$이므로 $a > 8$이여야 합니다. 그러므로 a는 9뿐입니다. 마찬가지로 하면 b = 9라는것을 알수 있습니다. 따라서 상은 989입니다.

③ $x = 1$이므로 네번째 행의 세자리수는 $\overline{1yz} \times 8 = \square\square\square$이 됩니다. 이 식으로부터 알수 있는바와 같이 이 세자리수의 높은 자리수는 8 또는 9입니다. 그런데 첫번째 나머지에서 이 세자리수를 덜어도 세자리수이므로 네번째 행의 세자리수의 높은 자리수는 8뿐이고 첫번째 나머지의 높은 자리수는 9뿐입니다. 즉

$$\overline{1yz} \times 8 = 8\square\square$$

입니다.

또 두번째 행으로부터 $\overline{1yz} \times 9 = \square\square\square\square$이라는 것을 알수 있습니다.

이 두 식이 모두 성립하게 하려면 $\overline{1yz}$는 112여야 합니다. 즉 나누는수는 112입니다.

④ 상이 989이고 나누는수가 112라는데로부터 나누일수는 989×112 =110768이 된다는것을 알수 있습니다. 나머지수들은 쉽게 구할수 있습니다. 답은 다음과 같습니다.

[설명] 이 실례에서 보는바와 같이 산수식에는 어떤 수량관계가 들어있습니다. 실례를 들면 $1yz\times8=8\square\square$은 보이지 않는 수량관계입니다. 그것은 나누는수 112를 찾는 기본열쇠입니다. 그러므로 이와 같은 산수식과 맞다들면 수량관계를 잘 찾아내야 합니다.

련습 1

1. 다음의 더하기산수식에서 빈칸에 알맞는 수를 써넣으십시오.

2. 다음의 더하기, 덜기산수식에서 빈칸에 알맞는 수를 써넣으십시오.

3. 다음의 곱하기산수식에서 빈칸에 알맞는 수를 써넣어 산수식이 성립되게 하십시오.

4. 다음의 나누기산수식에서 빈칸에 알맞는 수를 써넣어 산수식이 성립되게 하십시오.

5. 다음의 나누기산수식에서 빈칸에 알맞는 수를 써넣어 산수식이 성립되게 하십시오.

①

```
            □ □ 8 □ □
      ┌──────────────────
□ □ ) □ □ □ □ □ □ □
      □ □ □
      ──────────────────
              □ □
              □ □
              ──────────
                □ □ □
                □ □ □
                ────────
                      0
```

②

답

1. ①

$$\begin{array}{r} 99 \\ 8 \\ +\quad 4 \\ \hline 111 \end{array}$$

②

$$\begin{array}{r} 9999 \\ 9999 \\ +\quad 9999 \\ \hline 29997 \end{array}$$

2. ①

$$\begin{array}{r} 663 \\ 792 \\ +\quad 587 \\ \hline 2042 \end{array}$$

②

$$\begin{array}{r} 104 \\ -\quad 95 \\ \hline 9 \end{array}$$

3. ①

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times\quad 11 \\ \hline 66 \\ 66 \\ \hline 726 \end{array}$$

②

$$\begin{array}{r} 285 \\ \times\quad 35 \\ \hline 1425 \\ 855 \\ \hline 9975 \end{array}$$

4. ①

```
       5 7 9
  9 ) 5 2 1 9
      4 5
      -------
        7 1
        6 3
      -------
          8 9
          8 1
      -------
            8
```

②

```
          5 3
 3 7 ) 1 9 6 1
       1 8 5
       -------
         1 1 1
         1 1 1
       -------
             0
```

5. ①

```
             9 0 8 0 9
 1 2 ) 1 0 8 9 7 0 8
       1 0 8
       -------------
           9 7
           9 6
       -------------
             1 0 8
             1 0 8
       -------------
                 0
```

②

```
                 8 0 8 0 9
 1 2 4 ) 1 0 0 2 0 3 1 6
           9 9 2
         ---------------
           1 0 0 3
             9 9 2
         ---------------
               1 1 1 6
               1 1 1 6
         ---------------
                     0
```

제2절. 도형의 개수세기

도형의 개수를 세는 문제는 매우 흥미있는 도형문제들중의 하나입니다. 도형은 수많은 형태를 가지고있고 매우 복잡하므로 도형안의 어떤 도형의 개수를 세는데서 기본은 규칙에 따라 하나씩 세는것입니다. 이렇게 하면 반복되지도 않고 빼놓지도 않으면서 계산할수 있습니다.

실례 1. 그림 2－1에 몇개의 3각형이 있겠습니까?

그림 2－1

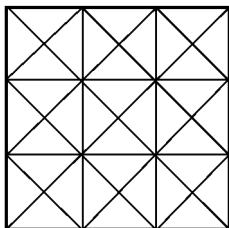
따져보기 그림을 잘 살펴보면 3각형들은 바른4각형의 대각선들에 의하여 생긴 도형이라는것을 알수 있습니다. 그러므로 바른4각형을 기준으로 생각하여야 합니다.

풀기 ① 그림 2－2와 같이 이 도형안에 3각형이 모두 8개 있으므로 이와 같은 3각형은 모두

그림 2－2

$$8\times9=72\text{개}$$

있습니다.

② 그림 2－3을 봅시다. 이 그림에서 새로 더 생긴 3각형은 한변의 길이가 작은 4각형의 두변의 합이고 나머지 두변은 바른4각형의 대각선으로 이루어져있습니다. 이와 같은 3각형은 2개 있습니다. 따라서 그림 2－1에는 이러한 3각형이 모두

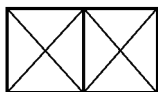



그림 2－3

$$2\times12=24\text{개}$$

있습니다.

③ 그림 2－4를 봅시다. 이 3각형의 긴 한변의 길이는 작은 4각형의 세변의 합이며 모두

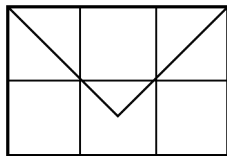



그림 2－4

$$1\times8=8\text{개}$$

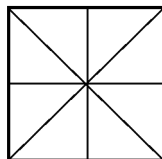
있습니다.

④ 그림 2－5에서와 같은 3각형은 모두

$$4\times4=16\text{개}$$

있습니다.

그림 2－5

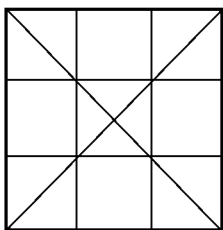
⑤ 그림 2－6과 같은 3각형은 모두 4개입니다.

①,②,③,④,⑤인 경우를 종합하면 문제

에서 요구하는 3각형의 개수가 얻어집니다.

$$8\times9+2\times12+1\times8+4\times4+4$$
$$=72+24+8+16+4=124\ (\text{개})$$

답. 3각형이 모두 124개 있습니다.

그림 2−6

실례 2. 그림 2−7에 몇개의 3각형이 있습니까?

따져보기 그림 2−7은 대칭도형입니다. 대칭성에 의하여 다음과 같은 4개의 작은 직4각형 AEOH, EBFO, FCGO, OGDH로 가를수 있습니다. 이것들가운데서 매 직4각형에 포함되여있는 3각형의 개수는 같습니다. 또 서로 이웃한 두개의 직4각형안에 포함되여있는 3각형의 개수도 같습니다. 마지막으로 서로 이웃한 세개의 직4각형을 다시 살펴보면 거기에 들어있는 3각형의 개수도 같습니다. 이와 같은 방법에 따라 분류하면 전체 도형속에 있는 3각형의 개수를 쉽게 계산할수 있게 됩니다.

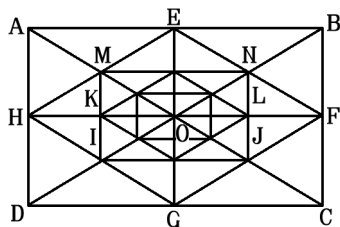



그림 2−7

풀기 ① 직4각형 AEOH안에 있는 3각형의 개수

한개의 3각형으로 구성된것, 두개의 3각형으로 구성된것, 세개 또는 그이상의 개수로 구성된것 등의 차례로 계산하면 3각형은 모두 (8+5+2+2+1 =)18개입니다.

이와 같은 네개의 직4각형에는 3각형이 모두 (18×4=)72개 있습니다.

② 직4각형 AEOH와 EBFO를 합쳤을 때 새로 생기는 3각형의 개수

밑변이 각각 HF, KL, MN, AB인 순서로 3각형을 세면 3각형이 모두 (1+1+2+1 =)5개라는것을 알수 있습니다.

이러한 3각형은 그림 2−7에 (5×4=)20개 있습니다.

③ 직4각형 AEOH, EBFO, FCGO를 합쳤을 때 새로 생기는 3각형의 개수

이와 같은 3각형은 모두 2개 있는데 그 하나의 밑변은 MP이고 다른 하나의 밑변은 AC입니다.

따라서 3각형은 (2×4=)8개 더 생겨납니다.

그림 2−7에 있는 3각형의 개수는

$$(8+5+2+2+1)\times4+(1+1+2+1)\times4+2\times4$$
$$=18\times4+5\times4+8$$
$$=100\ (개)$$

입니다.

답. 그림 2−7에 있는 3각형은 모두 100개 입니다.

[설명] 도형을 가를 때 그의 특징을 잘 알고 서로 다른 도형들사이의 경계를 명백히 하여야만 반복되거나 빼놓는 현상을 없앨수 있다는것을 알수 있습니다.

실례 3. 그림 2−8에 몇개의 3각형이 있습니까?

따져보기 이 도형안에 모양이 꼭같은 몇가지 형태의 3각형이 있는가를 보아야 합니다.

풀기 3각형 AGH와 꼭같은 3각형이 6개 있고 3각형 HBA와 같은 3각형이 6개 있습니다.

또한 3각형 AGB와 같은 3각형이 12개 있고 3각형 AFB와 같은 3각형이 6개 있습니다.

그리고 3각형 AEC와 같은 3각형도 2개 있습니다.

그림 2−8

따라서 그림 2−8에는 3각형이 모두

$$6+6+12+6+2=32(개)$$

있습니다.

답. 32개의 3각형이 있습니다.

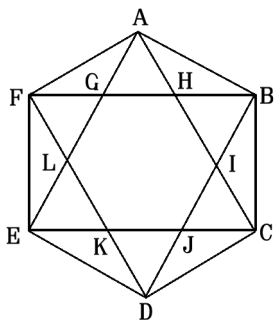
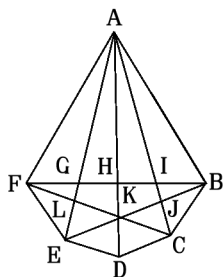
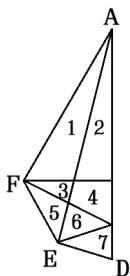



그림 2-9

실례 4. 그림 2-9에는 몇개의 3각형이 있습니까?

따져보기 선분 AD의 왼쪽과 오른쪽의 두 부분은 꼭 같습니다. 선분 AD를 경계로 도형을 두 부분으로 나눕니다. 두 부분으로 나눈 다음 매 부분에 있는 3각형의 개수를 세고 그것을 합친 다음 새로 생기는 3각형의 개수를 합치면 3각형의 총 개수가 얻어집니다.

풀기 1: ① 4각형 ADEF에 있는 3각형의 개수 (그림 2-10).

이 도형의 구성규칙으로부터 1개, 2개, 3개 및 4개의 부분으로 된 순서로 3각형을 셉니다. 이것을 표로 만들면 표 2-1과 같습니다.

그림 2-10

표 2-1

1개의 작은 부분	2개의 작은 부분	3개의 작은 부분	4개의 작은 부분
1, 2	12, 13	135	1234
3, 5	24, 34	246	2467
6, 7	35, 56		

그러므로 이와 같은 두개의 도형에는 3각형이 모두

$$(6+6+2+2)\times 2 = 32\ (\text{개})$$

있습니다.

② 4각형 ADEF와 ADCB가 만드는 3각형의 개수 표를 만들면 다음과 같습니다(표 2-2).

표 2-2

FB변	FI변	GB변	GI변	EB와 EJ변	FC와 LC변
AFB	AFI	AGB	AGI	AEB	AFC
KFB	CFI	EGB		AEJ	ALC
EFB					
CFB					

그러므로 3각형은 (4+2+2+1+2+2 =)13개 있습니다.

따라서 그림 2-9에는 3각형이 모두

$$(6+6+2+2)\times2+(4+2+2+1+2+2)$$
$$=16\times2+13=45\ (개)$$

있습니다.

[설명] 이 도형도 다른 방법으로 갈라서 셀수도 있습니다. 즉 먼저 3각형 ABF, ABE, ACF에 있는 3각형의 개수를 셉니다. 다음 5각형 BCDEF에 있는 3각형의 개수를 세고 마지막에 3각형 ABF와 5각형 BCDEF가 만드는 3각형의 개수를 셉니다.

풀기 2: ① 3각형 ABF에 3각형이 4+3+2+1 =10개 있고 3각형 ABE와 ACF에는 3각형이 (3+2+1)×2=12개 있습니다.

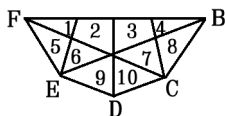



그림 2-11

② 5각형 BCDEF (그림 2-11)에 포함된 3각형의 개수는 표 2-3과 같습니다.

표 2-3

1개의 작은 부분	2개의 작은 부분	4개의 작은 부분	6개의 작은 부분
1, 4	12, 15	1234	123478
5, 6	34, 48	1237	123456
7, 8	56, 78	2346	
9, 10			

따라서 3각형은 모두 8+6+3+2 = 19개 있습니다.

③ 3각형 ABF와 5각형 BCDEF로 이루어진 3각형의 개수 3각형 ABC, ACD, ADE, AEF의 4개가 있습니다.

따라서 그림 2－9에는 3각형이 모두

$$10+12+19+4=45(\text{개})$$

있습니다.

[설명] 같은 도형에 대해서도 가르는 방법이 여러가지 있을수 있습니다. 그러나 실례들을 통하여 도형을 어떻게 가르겠는가에 관계없이 모든 규칙을 알아두면 정확하고 빠르게 계산할수 있다는것을 보여줍니다.

실례 5. 그림 2－12에 몇개의 직4각형이 있습니까?

따져보기 그림 2－12에서 직4각형 $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$와 $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$을 떼버리거나 직4각형 ABCD와 $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$ 또는 직4각형 ABCD와 $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$를 떼버린다면 나머지 부분에 있는 직4각형의 개수는 쉽게 계산됩니다. 그림 2－12를 계산하기 쉬운 모양으로 고친 다음 차례로 본래상태로 되돌아가는 방법을 써서 계산합시다.

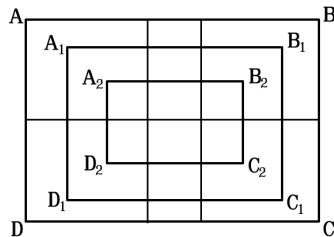



그림 2－12

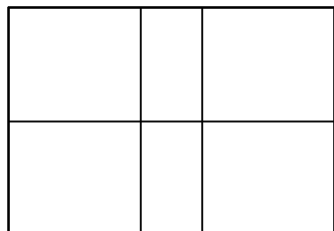



그림 2－12 (1)

풀기 ①그림 2－12 (1)에 있는 직4각형의 개수

$$(3+2+1)\times(2+1)=18\text{개}$$

② 그림 2－12 (2)에 새로 생긴 직4각형의 개수

그림 2－12 (1)에 새로 생긴 직4각형의 개수 즉 그림 2－12 (1)에서 세지 않은 직4각형의 개수는 다음과 같습니다.

$$(3+2+1)\times(2+1)+1\times2\times2=22\ (\text{개})$$

③ 그림 2－12 (3)에 새로 생긴 직4각형의 개수 즉 그림 2－12 (1)과 2－12 (2)에서 세지 않은 직4각형의 개수

$$(3+2+1)\times(2+1)+1\times2\times2+1\times2\times2=26\ (개)$$

따라서 그림 2－12에 있는 직4각형의 개수는 모두

$$(3+2+1)\times(2+1)\times3+1\times2\times2\times3$$
$$=54+12=66\ (개)$$

답. 66개의 직4각형이 있습니다.

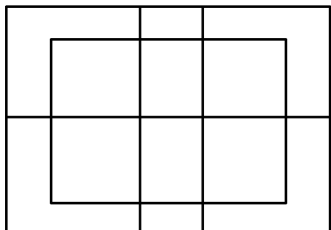



그림 2－12 (2)

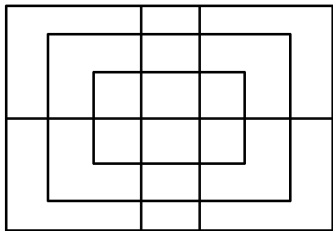



그림 2－12 (3)

실례 6. 그림 2－13에 몇개의 직4각형이 있습니까?

따져보기 그림 2－13을 그림을 다시 그려보면서 직4각형의 개수를 세여봅시다.

그림 2－13

풀기 ①그림 2－13 (1)에 있는 직4각형의 개수

$$(3+2+1)\times(3+2+1)=36\ (개)$$

② 그림 2－13 (2)에 새로 생긴 직4각형의 개수 즉 그림 2－13 (1)에서 세지 않은 직4각형의 개수

$$(4+3+2+1)\times(2+1)=30\ (개)$$

③ 그림 2－13 (3)에 새로 생긴 직4각형의 개수 즉 그림 2－13 (1), 그림 2－13 (2)에서 세지 않은 직4각형의 개수

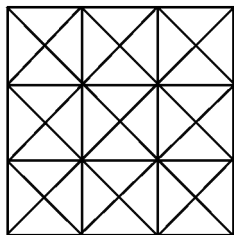
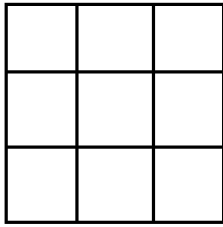
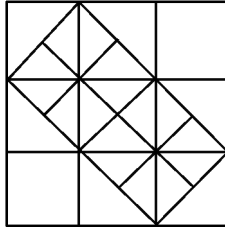
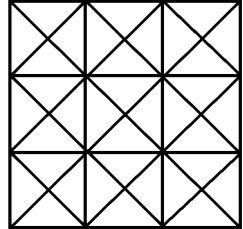



그림 2－13 (1)　　　그림 2－13 (2)　　　그림 2－13 (3)

$$(4+3+2+1)\times(2+1)-(2+1)\times(2+1)=21\ (개)$$

또는 $$7\times(2+1)=21\ (개)$$

그러므로 그림 2－13에 있는 직4각형의 개수는

$$(3+2+1)\times(3+2+1)+(4+3+2+1)\times(2+1)\times2$$
$$-(2+1)\times(2+1)=36+60-9=87\ (개)$$

입니다.

답. 87개의 직4각형이 있습니다.

[**설명**] 실례 1과 실례 2에서 리용한 방법을 《도형재현법》(그림을 다시 그리는 방법)이라고 부릅니다. 사실 다시 그림을 그리는 과정은 도형그리기규칙을 찾는 과정입니다. 그림을 다시 그릴 때 매 단계에서 새로 생기는 도형의 개수에 주목을 돌리는것과 함께 두 단계에서 도형을 결합시킬 때 반복계산되지 않도록 하는데 주의를 돌려야 합니다.

실례 7. 그림 2－14에 몇개의 직4각형이 있습니까?

그림 2－14

풀기 ① 그림 2－14 (1)과 그림 2－14 (2)에 있는 직4각형의 개수

$$(4+3+2+1)\times(3+2+1)\times2=120\ (개)$$

② 그림 2－14 (3)에 새로 생긴 직4각형의 개수 즉 그림 2－14 (1)과 그림 2－14 (2)에서 세지 않은 직4각형의 개수

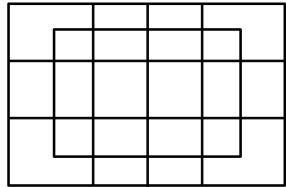
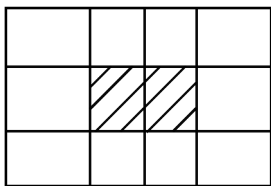



그림 2-14 (1)

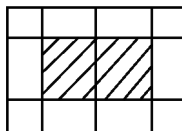



그림 2-14 (2)

그림 2-14 (3)

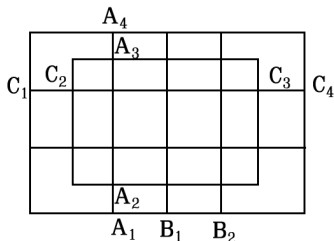
그림 2－14 (3)에서 보는 바와 같이 수직방향에 새로 생긴 길이는 A_1A_2, A_1A_3, A_3A_4이고 그에 대응하는 너비는 A_1B_1, A_1B_2, B_1B_2 입니다. 그러므로 새로 생긴 직4각형은 $4\times 3=12$개 입니다. 수평방향에 새로 생긴 길이는 C_1C_2, C_1C_3, C_3C_4, C_2C_4이고 그에 대응하는 너비는 C_1D_1 입니다. 그러므로 새로 또 생긴 직4각형은 $4\times 1=4$개 입니다. 따라서 새로 생긴 직4각형은 모두 $12+4=16$개 입니다.

이밖에 다음과 같은 사실들에 주의를 돌려야 합니다. 그림 2－14 (1)과 그림 2－14 (2)를 다시 결합하여 그림 2－14 (3)을 만들 때 빗선을 친 부분이 반복됩니다. 이로부터 반복계산되는 부분이 생깁니다. 따라서 반복되는 부분의 직4각형 $(2+1)\times 1=3$개를 빼버려야 합니다.

그림 2－14에 있는 직4각형의 개수는

$$(4+3+2+1)\times(3+2+1)\times 2+4\times 3+4\times 1-(2+1)\times 1$$
$$=120+12+4-3$$
$$=133\ (\text{개})$$

입니다.

실례 8. 그림 2−15에 몇개의 직4각형이 있습니까?

풀기 ① 그림 2−15 (1)에 있는 직4각형의 개수

$(3+2+1)\times(2+1)\times2+4\times1=40$ (개)

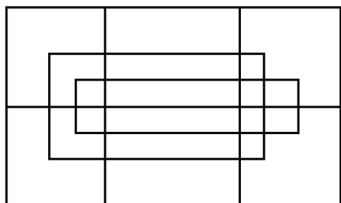



그림 2−15

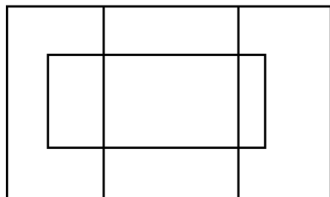



그림 2−15 (1)

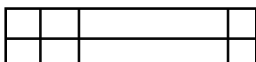
② 그림 2−15 (2)에 있는 직4각형의 개수

$(4+3+2+1)\times(2+1)=30$ (개)

그림 2−15 (2)

③ 그림 2−15 (3)에 새로 생긴 직4각형의 개수 (즉 그림 2−15 (1)과 그림 2−15 (2)에서 계산되지 않은 직4각형의 개수)

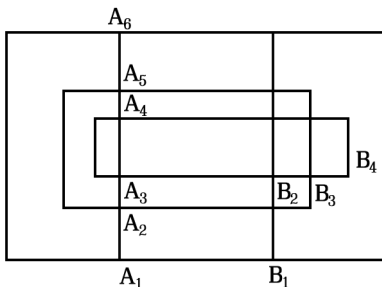



그림 2−15 (3)

그림 2−15 (3)과 같이 새로 생긴 길이는 A_1A_3, A_1A_4, A_4A_6, A_3A_6 이고 그에 대응하는 너비는 A_1B_1입니다. 새로 생긴 길이는 또한 A_2A_3, A_2A_4, A_4A_5, A_3A_5입니다. 그에 대응하는 너비는 A_3B_2, A_3B_3, B_2B_3입니다. 그러므로 새로 생긴 직4각형은 모두 $4\times1+4\times3=16$개 입니다.

그러므로 그림 2−15에 있는 직4각형의 개수는 모두

$(3+2+1)\times(2+1)\times2+4\times1+(4+3+2+1)\times(2+1)+4\times1+4\times3$
$=36+4+30+4+12=86$ (개)

입니다.

[설명] 이 절의 내용을 통하여 알수 있는바와 같이 기본도형을 세는 방법을 잘 알기만 하면 복잡한 도형을 세는 기초를 닦을수 있습니다. 여기서 분류를 알맞게 잘하는것이 복잡한 도형의 개수를 세는 열쇠로 됩니다. 분류하는 방법에는 여러가지가 있습니다. 그러므로 련습을 많이 하는 과정을 통하여 체득하여야 합니다.

련습 2

1. 그림 2−16에 몇개의 3각형이 있습니까?

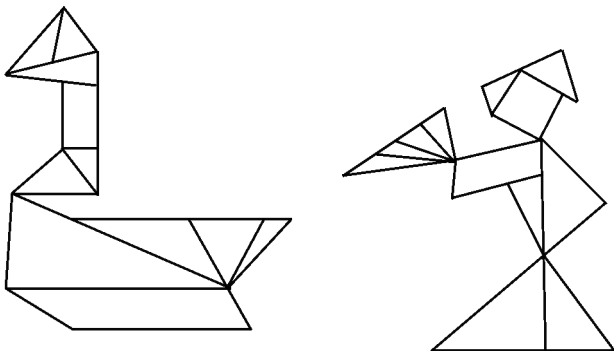



그림 2−16

2. 그림 2−17에 몇개의 3각형이 있습니까?
3. 그림 2−18에 몇개의 3각형이 있습니까?
4. 그림 2−19에 몇개의 3각형이 있습니까?
5. 그림 2−20에 몇개의 3각형이 있습니까?
6. 그림 2−21에 몇개의 직4각형이 있습니까?

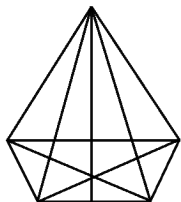



그림 2 − 17

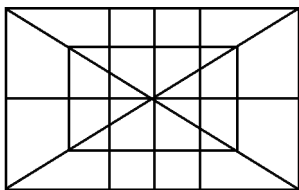



그림 2-18

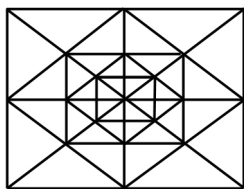



그림 2-19

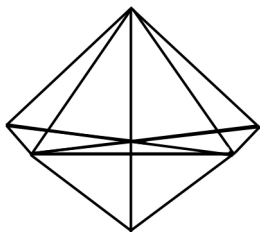



그림 2-20

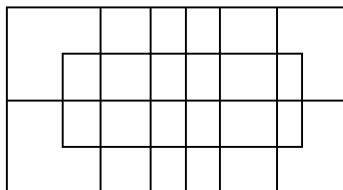



그림 2-21

7. 그림 2-22에 몇개의 바른4각형이 있습니까?
8. 그림 2-23에 몇개의 직4각형이 있습니까?

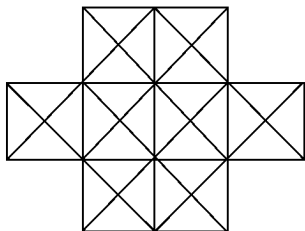



그림 2-22

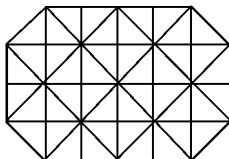



그림 2-23

9. 그림 2-24에 몇개의 직4각형이 있습니까?
10. 그림 2-25에 몇개의 직4각형이 있습니까?

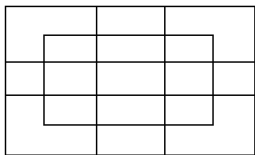



그림 2-24

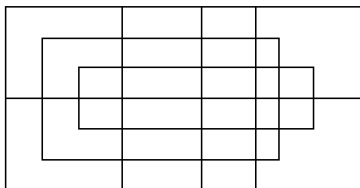



그림 2-25

답

1. ① 14 ② 17 2. 51 3. 52 4. 128 5. 37 6. 166
7. 24 8. 45 9. 79 10. 153

제3절. 수자수수께끼

수자수수께끼문제의 풀이방법도 산수식의 빈칸을 채우는 문제의 풀이방법과 마찬가지로 문제에 대한 파악, 기본열쇠의 선택과 계산하여 답을 찾는 세 단계로 갈라볼수 있습니다.

서로 다른 점은 수자수수께끼의 대부분은 글자 또는 부호로 산수식의 수를 표시한것입니다. 이것은 문제를 푸는데 일정한 어려움을 가져옵니다.

실례 1. 다음의 산수식에서 서로 다른 글자는 서로 다른 수를 표시하고 같은 글자는 같은 수를 표시합니다. 이 산수식을 푸십시오.

$$\begin{array}{rcccccc} & & V & I & D & G & T \\ & & & C & I & N & Q \\ + & & & C & I & N & Q \\ \hline & T & R & E & D & T & E \end{array}$$

따져보기와 풀기

풀이의 기본열쇠를 합의 첫자리에 있는 수 T에서 찾습니다. 물론 T＝1입니다.

① 열의 자리에서： 합의 하나자리수가 1이므로 열의 자리에서 백의 자리에로 자리올림이 있게 됩니다.

② 백의 자리에서： D+I+I+자리올림수의 하나자리가 D이므로 열의 자리에서 백의 자리에 2이 올라옵니다. 이로부터 I=4이라는것을 알수 있습니다.

③ 만의 자리에서： V=8 또는 V=9 입니다.

만일 V=8이면 천의 자리에서 4+C+C+1(자리올림)>21이므로 C=9입니다. 이로부터 E=3, Q=6이 얻어집니다. 그런데 이때 N, G는 풀이를 가지지 못합니다. 그러므로 V=9, R=0이며 천의 자리에서 만의 자리에로의 자리올림이 생깁니다.

④ 천의 자리에서: 4+C+C+1 (자리올림)<19이므로 C<7입니다. 또 4+C+C+1 (자리올림)>11이므로 C>3입니다. 따라서 C=5 또는 C=6 (I=4입니다)입니다. 만일 C=5이면 E=5이 되는데 반복됩니다. 그러므로 C=6, E=7입니다. 이로부터 Q=3이라는것을 알수 있습니다.

⑤ 열의 자리에서 백의 자리에 2가 올라가야 하므로 N = 8,G =5입니다.

마지막으로 D=2가 얻어집니다.

그러므로 주어진 더하기산수식은 다음과 같습니다.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 9 & 4 & 2 & 5 & 1 \\
 & & 6 & 4 & 8 & 3 \\
+ & & 6 & 4 & 8 & 3 \\
\hline
1 & 0 & 7 & 2 & 1 & 7
\end{array}
$$

실례 2. 다음의 덜기산수식에서 같은 글자는 같은 수를 표시하고 서로 다른 글자는 서로 다른 수를 표시합니다. 이 산수식을 구하십시오.

$$
\begin{array}{r}
ABAB \\
-\ \ ACA \\
\hline
BAAC
\end{array}
$$

따져보기와 풀기

이것은 덜기산수식이므로 더하기의 거꿀계산을 리용하여 더하기산수식으로 넘겨서 풀수 있습니다. 주어진 식을 다음과 같이 고칠수 있습니다.

$$
\begin{array}{r}
BAAC \\
+\ \ ACA \\
\hline
ABAB
\end{array}
$$

열의 자리수를 풀이의 기본열쇠로 선택할수 있습니다.

열의 자리를 선택하는데서 다음과 같은 두가지 경우가 있을수 있습니다. 즉

① A+C의 하나자리가 A인 경우

② A+C+1 (자리올림)의 열의 자리가 A인 경우

이로부터 C=0 또는 C=9이라는것을 알수 있습니다. 만일 C=0이면 합의 하나자리가 A로 되여야 하는데 이것은 문제의 조건을 만족시키지 못합니다. 그러므로 C=9입니다.

천의 자리에서 B와 A사이의 관계는 B+1(자리올림)=A입니다.

백의 자리에서 A+A+1 (자리올림)의 하나자리는 B입니다. 백의 자리에서 천의 자리에 1이 올라가야 하므로 A≧5입니다. A는 다음과 같은 네개 값 즉 5, 6, 7, 8 (9는 이미 C로 취하였습니다)을 가질수 있습니다.

5+5+1=11, 6+6+1=13, 7+7+1=15, 8+8+1=17 중에서 8+8+1=17만이 7+1=8을 만족시킵니다. 그러므로 A=8, B=7입니다.

주어진 산수식은 다음과 같습니다.

$$\begin{array}{rcccc} & 8 & 7 & 8 & 7 \\ - & & 8 & 9 & 8 \\ \hline & 7 & 8 & 8 & 9 \end{array}$$

실례 3. 다음의 곱하기산수식에서 같은 글자는 같은 수를 표시하고 서로 다른 글자는 서로 다른 수를 표시합니다. 이 산수식을 구하십시오.

$$\begin{array}{rccccc} & & & A & B & C \\ \times & & & & D & C \\ \hline & & & B & E & A \\ & F & A & G & H & \\ \hline & F & I & G & A & A \end{array}$$

따져보기와 풀기

ABC×C=BEA 이므로 풀이의 기본열쇠로 C와 A를 선택합니다.

C×C의 하나자리가 A라는 조건에 의하여 C의 값범위는 2, 3, 4, 7, 8, 9이고 이에 맞게 A는 4, 9, 6, 1을 가질수 있다는것을 알수 있습니다. A+C+자리올림수가 더이상 자리올림을 할수 없으므로 C=2, A=4 만이 조건을 만족시킵니다. 따라서 B=9, E=8이 얻어집니다.

적의 열의 자리로부터 알수 있는바와 같이 A=4, E=8 이므로 H=6 입니다. 이것은 C×D의 하나자리가 6이라는 것을 보여줍니다. 그러므로 D=3 또는 D=8입니다. E=8 이므로 D=3이 됩니다.

이렇게 하여 곱해질수와 곱하는수를 구하였습니다. 주어진 산수식은 다음과 같습니다.

$$\begin{array}{rccccc} & & & 4 & 9 & 2 \\ \times & & & & 3 & 2 \\ \hline & & & 9 & 8 & 4 \\ & 1 & 4 & 7 & 6 & \\ \hline & 1 & 5 & 7 & 4 & 4 \end{array}$$

실례 4. 다음의 나누기산수식에서 같은 글자는 같은 수를 표시하고 서로 다른 글자는 서로 다른 수를 표시합니다. 이 산수식을 구하십시오.

$$\begin{array}{cc|cccccc}
 & & & & C & D & G & F \\ \cline{3-8}
A & B & C & D & D & E & F & D \\
 & & & A & B & & & \\ \cline{3-8}
 & & & & G & E & F & \\
 & & & & C & A & H & \\ \cline{5-8}
 & & & & & E & A & D \\
 & & & & & E & A & D \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 0
\end{array}$$

따져보기와 풀기

나누기식을 살펴보면 D=0이라는것을 알수 있습니다. 나누기식

$$\begin{array}{c|ccc}
 & & & C \\ \cline{2-4}
AB & C & D & D \\
 & & A & B \\ \cline{2-4}
 & & & G
\end{array}$$

로부터 C=1, A=9이라는것을 알수 있습니다.

덜기산수식

$$\begin{array}{cccc}
 & G & E & F \\
- & C & A & H \\ \hline
 & & E & A
\end{array}$$

로부터 알수 있는바와 같이 C=1이므로 G=2이고 따라서 B=8이 얻어집니다.

$98 \times F = E\,90$에 의하여 F=5, E=4이 얻어집니다.

나누일수, 나누는수, 상이 얻어졌으므로 주어진 산수식은 다음과 같습니다.

$$
\begin{array}{r|cccccc}
 & & & 1 & 0 & 2 & 5 \\ \hline
98 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\
 & & 9 & 8 & & & \\ \hline
 & & & 2 & 4 & 5 & \\
 & & & 1 & 9 & 6 & \\ \hline
 & & & & 4 & 9 & 0 \\
 & & & & 4 & 9 & 0 \\ \hline
 & & & & & & 0
\end{array}
$$

실례 5. A, B, C, D, E, F는 각각 수 1부터 9까지에서 임의의 한개 수를 표시하며 서로 다른 글자는 서로 다른 수를 표시합니다. 만일 A－B=1, C－B=4, D－A=2, C－E=5, B+E=3, F+B=6이면 E+F, A+D, A+C는 얼마입니까?

따져보기와 풀기

A,B, C, D, E, F 가 각각 어떤 수를 표시하는가를 알려면 어떤 더하기식 또는 덜기식부터 계산하여야 합니다. 풀이의 기본열쇠로서 B+E=3을 선택합니다.

B+E=3이므로 B, E는 B=1, E=2 또는 B=2, E=1을 취할수 있습니다.

만일 B=1, E=2이면 조건 A－B=1에 의하여 A=2이 얻어지는데 E와 같아집니다. 그러므로 B=2, E=1입니다.

A－B=1로부터 A=1+2=3이 얻어지고 C－B=4으로부터 C=4+2=6이 얻어집니다. D－A=2로부터 D=2+3=5이 얻어지고 F+B=6으로부터 F=6－2=4이 얻어집니다.

그러므로 E+F=1+4=5, A+D=3+5=8, A+C=3+6=9입니다.

[설명] 문제에서 E+F, A+D, A+C의 합을 구할것을 요구하므로 A, B, C, D, E, F를 표시하는 모든 수를 다 구할 필요가 없습니다. 주어진 산수식을 리용하여 구할수 있습니다. 즉

$$E+F=(F+B)+(C-B)-(C-E)=6+4-5=5$$

$$A+D=(A-B)+(D-A)+(A-B)+(B+E)+(C-E)-(C-B)$$
$$=1+2+1+3+5-4=8$$

$$A+C=(A-B)+(C-E)+(B+E)=1+5+3=9$$
입니다.

실례 6. 다음의 산수식에서 정, 보, 화는 각각 서로 다른 수를 표시합니다. 이 산수식을 구하십시오.

		정	보	화
×		정	보	화
	□	□	□	화
	□	□	화	
□	□	□		
화	화	□	□	화

따져보기와 풀기

이것은 수자수수께끼와 빈칸채우기문제를 결합시킨 문제입니다. 문제에서 볼수 있는바와 같이 주어진 조건은 적습니다. 그러므로 《화》가 써있는 자리의 수량관계에 의하여 기본열쇠를 찾아야 합니다.

정보화×화=□□□화로부터 화≠1이라는것을 알수 있습니다. 따라서 화=5 또는 화=6이여야 합니다.

① 만일 화=5이면 곱하기식으로부터 정보화×정=□□□의 적의 백의 자리수는 반드시 3보다 크지 말아야 하고 5보다 작거나 같아야 한다는것을 알수 있습니다. 정보화×보=□□5이므로 《보》는 홀수이고 5보다 작습니다. 그러므로 보=1 또는 보=3이여야 합니다. 보=1일 때 215×215=46,225로서 조건을 만족시키지 못합니다. 따라서 보=3이여야 하며 곱하기산수식은 다음과 같이 됩니다.

		2	3	5
×		2	3	5
	1	1	7	5
	7	0	5	
4	7	0		
5	5	2	2	5

② 만일 화=6이면 우와 꼭같이 곱하기산수식으로부터 정보화 ×정=□□□의 적의 백의 자리수는 4보다 크거나 같고 6보다 작거나 같다는것을 알수 있습니다. 그러므로 정=2이여야 합니다. 2보6×보=□□6이므로 보=1이여야 합니다. 그런데 216×216=46656이므로 조건을 만족시키지 못합니다.

따라서 조건을 만족시키는 산수식은 다음과 같습니다.

		2	3	5
×		2	3	5
	1	1	7	5
	7	0	5	
4	7	0		
5	5	2	2	5

실례 7. 다음의 곱하기산수식에서 《짝》자는 0, 2, 4, 6, 8 가운데서 어떤 값을 취할수 있고 《홀》자는 1, 3, 5, 7, 9 가운데서 어떤 값을 취할수 있습니다. 이 산수식을 구하십시오.

			짝	짝	홀
×				홀	홀
		짝	홀	짝	홀
		짝	홀	홀	
	홀	홀	홀	홀	홀

따져보기와 풀기

곱해질수와 곱하는수부터 구하여야 합니다.

곱해질수와 곱하는수를 각각 abc, xy라고 합시다.

$abc\times x$=짝홀홀에 의하여 $x\neq 1$, x=3임을 알수 있으므로 x=3입니다. 이때 a=2입니다.

2bc×3=짝홀홀에 의하여 c×3의 자리올림은 홀수이고 b×3의 자리올림은 짝수입니다. 그러므로 c=5, b=2 또는 b=8입니다.

2b5×y=짝홀짝홀에 의하여 y=9이고 b>2임을 알수 있으므로 b는 8만을 취할수 있습니다.

주어진 곱하기산수식은 다음과 같습니다.

$$\begin{array}{rrrrr} & & 2 & 8 & 5 \\ \times & & & 3 & 9 \\ \hline & 2 & 5 & 6 & 5 \\ & 8 & 5 & 5 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

[설명] 우의 실례들을 통하여 알수 있는바와 같이 수자수수께끼문제를 푸는 과정에 산수식의 특성과 수량관계를 잘 따져보는것은 문제풀이의 기본열쇠로 되며 풀이를 구하는 전제조건으로 됩니다.

련습 3

1. 다음의 더하기식, 덜기식들에서 같은 글자는 같은 수를 표시하고 서로 다른 글자는 서로 다른 수를 표시합니다. 이 산수식을 구하십시오.

① $$\begin{array}{rrrrr} & A & B & C & D \\ + & A & B & E & D \\ \hline E & D & C & A & D \end{array}$$

② $$\begin{array}{rrrr} & A & B & C & D \\ - & & C & D & C \\ \hline & & A & B & C \end{array}$$

2. 다음의 곱하기산수식에서 같은 글자는 같은 수를 표시하고 서로 다른 글자는 서로 다른 수를 표시합니다. 이 산수식을 구하십시오.

$$\begin{array}{rrrrr} & A, & B & C & D \\ \times & & & & 9 \\ \hline & D, & C & B & A \end{array}$$

3. 여섯자리수 ABCDEF가 있습니다. 매 자리에 있는 수들은 모두 다릅니다. 이 여섯자리수에 3을 곱한 식과 5을 곱한식은 다음과 같습니다.

$$\begin{array}{rcccccc} & A & B & C & D & E & F \\ \times & & & & & & 3 \\ \hline & B & C & D & E & F & A \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} & A & B & C & D & E & F \\ \times & & & & & & 5 \\ \hline & F & A & B & C & D & E \end{array}$$

이 여섯자리수를 구하십시오.

4. 다음의 나누기산수식에서 같은 글자는 같은 수를 표시하고 서로 다른 글자는 서로 다른 수를 표시합니다. 이 산수식을 구하십시오.

$$AAAAAAAAA \div H = ABCDEFGH$$

5. 다음의 나누기산수식에서 같은 글자는 같은 수를 표시하고 서로 다른 글자는 서로 다른 수를 표시합니다. 이 산수식을 구하십시오.

①

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & A & B & C \\ \times & & & & C & B & A \\ \hline & & & D & E & F & G \\ & F & G & A & H & & \\ \hline & F & G & E & I & F & G \end{array}$$

②

6. DCBA－ABCD = 2997이고 C－D = 5 입니다. 네자리수 ABCD를 구하십시오(같은 글자는 같은 수를 표시하고 서로 다른 글자는 서로 다른 수를 표시합니다).

7. 다음의 나누기산수식에서 《짝》자는 0, 2, 4, 8가운데서 어떤 수를 표시하고 《홀》은 1, 3, 5, 7, 9가운데서 어떤 수를 표시합니다. 이 산수식을 구하십시오.

$$
\begin{array}{r}
\text{짝 짝} \\
\text{짝 짝}\overline{)\text{홀 홀 짝 짝}} \\
\underline{\text{홀 짝 짝}} \\
\text{짝 짝} \\
\underline{\text{짝 짝}} \\
0
\end{array}
$$

답

1.

①

$$
\begin{array}{r}
5240 \\
+\ 5210 \\
\hline
10450
\end{array}
$$

②

$$
\begin{array}{r}
1098 \\
-\ 989 \\
\hline
109
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{r}
1089 \\
\times\ \ \ \ 9 \\
\hline
9801
\end{array}
$$

3. 142,857

4. $111111111 \div 9 = 12345679$

5.

①

$$
\begin{array}{r}
407 \\
\times\ 704 \\
\hline
1628 \\
2849 \\
\hline
286528
\end{array}
$$

②

$$
\begin{array}{r}
5948 \\
19\overline{)113012} \\
\underline{95} \\
180 \\
\underline{171} \\
91 \\
\underline{76} \\
152 \\
\underline{152} \\
0
\end{array}
$$

6. 1994

7.
$$\begin{array}{r} 42 \\ 42\overline{)1764} \\ \underline{168} \\ 84 \\ \underline{84} \\ 0 \end{array}$$

제4절. 못판과 고무줄문제

판자에 못을 박은것을 못판이라고 부릅니다. 이때 못은 일정한 규칙에 따라 박혀져있습니다. 못판우의 어떤 못을 정점으로 잡고 고무줄로 이 정점들을 차례로 련결하면 서로 다른 다각형이 얻어집니다. 이때 얻어지는 다각형의 개수를 구하는 문제가 곧 《못판과 고무줄문제》의 하나입니다. 이제 몇개의 실례를 들어 풀이방법을 봅시다.

실례 1. 그림 4−1은 7개의 못으로 된 못방진입니다. 차례로 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7과 같이 번호를 답니다. 여기서 1, 2, 3, 4는 한 직선우에 있습니다. 고무줄로 이 못을 련결하면 모두 몇개 선분이 얻어지겠습니까?

따져보기와 풀기

매 선분은 두개의 끝점을 가지고있으므로 고무줄로 그림 4−1의 두 점을 련결하면 그림 4−2가 얻어집니다. 이리하여 문제는 그림 4−2의 선분의 개수를 구하는 문제로 됩니다. 1, 2, 3, 4의 4개 못으로 만들수 있는 선분은 3+2+1= 6(개) 입니다.

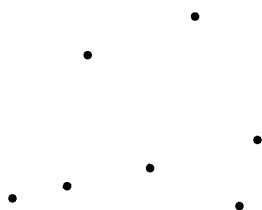



그림 4−1

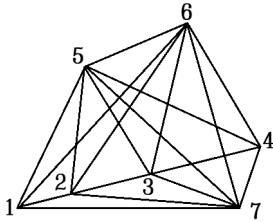



그림 4－2

못 5를 고정하면 6개의 못이 남습니다. 못 5와 이 6개의 못을 련결하면 선분 (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (5, 7)의 6개가 얻어집니다.

못 6을 고정하면 5개의 못이 남습니다. 못 6과 5개의 못을 련결하면 선분 (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 7)의 5개가 얻어집니다(반복되는 (6, 5)는 빼놓습니다).

못 7을 고정하면 못 7과 나머지 4개 못으로 만들수 있는 선분은 (7,1), (7, 2), (7, 3), (7, 4)의 4개입니다(반복되는 (7, 5), (7, 6)은 빼놓습니다).

이 7개의 못으로 만들수 있는 선분은

$$6+6+5+4=21\ (\text{개})$$

입니다.

실례 2. 그림 4－3은 서로 이웃한 가로, 세로 사이거리가 꼭같은 4×5인 직4각형모양의 못방진입니다. 여러개의 고무줄이 있다면 서로 다른 바른4각형을 모두 몇개 만들수 있습니까?

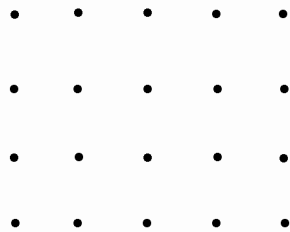



그림 4－3

따져보기와 풀기

이 문제는 바른4각형의 개수를 구하는 일반문제와 비슷합니다. 그런데 이 문제에서 바른4각형의 4개 정점은 4개의 못이므로 고무줄로 련결한 모든 바른4각형이 다 구하려는 바른4각형으로는 되지 않습니다. 그림 4－5에서 빗선을 친 바른4각형은 구하려는 바른4각형이 아닙니다(여기서 두개의 정점은 못이 아닙니다). 서로 이웃한 두 못사이의 거리가 1이라고 가정하였을 때 고무줄로써 그림 4－3의

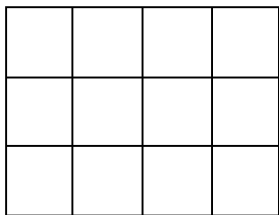



그림 4－4

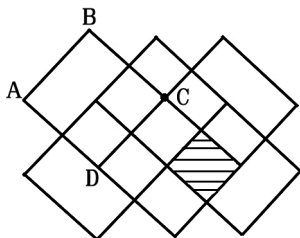



그림 4－5

20개 못을 련결하면 그림 4－4와 같게 됩니다. 면적이 1인 바른4각형은 4×3 =12(개)입니다. 면적이 4인 바른4각형은 3×2 = 6(개)입니다. 면적이 9인 바른4각형은 2개 입니다. 그러므로 고무줄로 그림 4－3의 20개 못을 련결하면 4×3+3×2+2×1= 20 (개)의 바른4각형이 얻어집니다.

이제 그림 4－4의 어떤 작은 바른4각형의 정점의 못을 고무줄로 련결하면 그림 4－5가 얻어집니다. 선분 AB, BC, CD,DA는 모두 변의 길이가 1인 바른4각형의 대각선이므로 AB = BC = CD = DA이고 4각형 ABCD의 4개 각은 모두 90°입니다. 따라서 4각형 ABCD도 바른4각형입니다. 그림 4－5에서 바른4각형 ABCD와 같은 모양의 바른4각형은 3×2=6 (개)입니다. 그림 4－4에서 서로 이웃한 두 바른4각형을 련결하여 만든 직4각형의 정점의 못을 고무줄로 련결하면 그림 4－6이 얻어집니다.

선분 AB, BC, CD, DA는 모두 같은 직4각형의 대각선이므로 AB=BC=CD=DA 입니다. ABCD의 4개 각도 90°라는것을 알수 있습니다. 이 4각형 ABCD는 바른4각형입니다. 그림 4－6에서 모양이 바른4각형 ABCD와 같은 바른4각형은 2×2=4 (개)입니다.

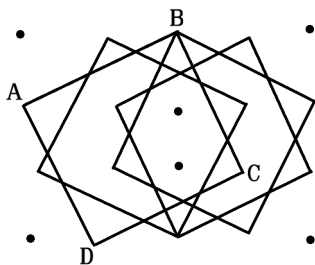



그림 4－6

이 못방진에서 만들수 있는 바른4각형은

$$4\times3+3\times2+2+3\times2+2\times2=30(\text{개})$$

입니다.

[설명] 도형의 개수를 셀 때 갈라서 세는 방법이 리로울 때가 많다는것을 보았습니다. 못판과 고무줄문제를 풀 때도 도형이 몇개로 이루어졌는가를 알려면 못의 위치와 고무줄로 련결할수 있는 갈래를 잘 알아야 하는데 이것이 하나의 어려운 문제점으로 제기됩니다. 그러므로 가를 때 쉽게 볼수 있는 규칙적인 도형밖에 쉽게 찾기 어려운 불규칙적인 도형에도 주의를 돌려야 합니다.

실례 3. 원둘레우의 6개의 점(꼭 같은 거리로 가른)에 차례로 못 1, 2, 3, 4, 5, 6을 박았습니다. 이 6개의 못가운데서 임의로 3개를 고무줄로 련결하여 3각형을 만듭니다.

① 정점이 못 1인 3각형은 모두 몇개 취할수 있습니까?

② 6개의 못가운데서 임의로 3개의 못을 취하여 고무줄로 련결한다면 몇개의 3각형을 만들수 있습니까?

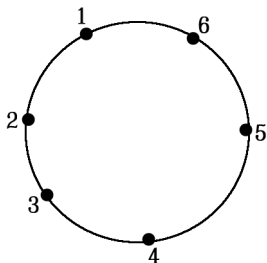



그림 4-7

따져보기와 풀기

문제의 조건에 의하여 6개의 못을 고무줄로 련결하면 그림 4-8이 얻어집니다.

그림 4-8에서 고무줄이 가로, 세로로 사귀여있으므로 마치도 규칙이 없는것처럼 보입니다. 만일 가르는 방법을 쓰려한다면 먼저 갈라야 할 기준도형을 선택하여야 합니다. 3각형을 기준도형으로 잡기는 어렵습니다. 왜냐하면 그림 4-8에서 모양이 같은 3각형을 찾기 힘들

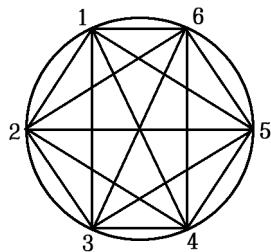



그림 4-8

기때문입니다. 제일 좋은 방법은 못의 번호를 기준으로 잡는것입니다. 그것은 서로 다른 못번호는 서로 다른 3각형을 만들기때문입니다. 이와 같은 경우 표를 만들어 푸는 방법을 쓰는것이 좋습니다.

① 못 1을 고정하고 못 1과 나머지못의 결합을 살펴보면 표 4−1이 얻어집니다. 표 4−1에서 3각형은 서로 다른 못들로 이루어진 3각형입니다. 표 4−1에는 10개의 3각형이 있습니다. 즉 못 1이 정점인 3각형은 10개입니다.

표 4−1. 못 1과 나머지못의 결합

못1 / 못번호	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2		0	0	0	0
3			0	0	0
4				0	0
5					0

② 문제에서는 그림 4−8에서 임의의 3개 못을 련결하여 만든 3각형의 개수를 구할것을 요구합니다. 표 4−1에서 구한 3각형도 여기에 속합니다. 이제 차례로 못 2, 못 3, 못 4로써 만들어지는 3각형의 개수를 계산합시다.

표 4−2. 못 2와 나머지못의 결합

못 2 / 못번호	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3		0	0	0
4			0	0
5				0

표 4−3. 못 3과 나머지못의 결합

못 3 / 못번호	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4		0	0
5			0

표 4−4. 못 4와 나머지못의 결합

못 3 / 못번호	(4, 5)	(4, 6)
5		0

이 3개의 표로부터 3각형은 모두 10개라는것을 알수 있습니다. 여기에 앞에서 구한 10개의 3각형을 더하면 6개의 못가운데서

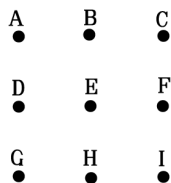
임의의 3개로 만들수 있는 3각형은 20개입니다.

A B C

D E F

G H I

그림 4-9

실례 4. 9개의 못으로 간격이 1cm인 바른4각형모양의 방진을 만듭니다(그림 4-9). 만일 한개의 고무줄로 3개의 못을 적당히 련결하여 한개의 3각형을 만든다면 이 3각형의 면적이 1cm^{2}인 3각형은 모두 몇개 있겠습니까?

따져보기와 풀기

3각형의 면적은 밑변에 높이를 곱한 적을 2로 나눈것과 같습니다. 문제의 조건으로부터 면적이 1cm^2 3각형이 몇개인가를 구하는것이므로 구하려는 3각형을 다음과 같이 두가지로 나눕시다. 첫번째 경우로서 밑변이 2cm이고 높이가 1cm인 3각형을 구하는것이고 두번째 경우는 밑변이 1cm이고 높이가 2cm인 3각형을 구하는것입니다. 밑변이 2cm이고 높이가 1cm인 3각형은 그림 4-10과 같습니다. GI가 밑변이고 높이 (DG, EH, FI)가 1cm인 3각형의 개수(면적이 1cm^2)는 3개이고 꼭같이 DF(2cm)가 밑변이고 높이 (AD, BE, CF)가 1cm인 3각형도 3개입니다. 꼭같은 방법으로 밑변이 BH이고 높이가 1cm인 3각형, CI가 밑변이고 높이가 1cm인 3각형은 6개입니다. 밑변이 AC, DF이고 높이가 1cm인 3각형도 6개입니다. AG, BH가 밑변이고 높이가 1cm인 3각형도 6개입니다. 이렇게 하여 밑변이 2cm이고 높이가 1cm인 3각형(면적이 1cm^2)은 모두 24개 있습니다.

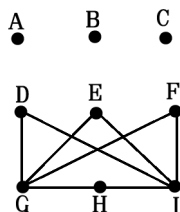



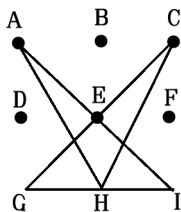
그림 4-10

밑변이 1cm이고 높이가 2cm인 3각형은 그림 4-11과 같습니다.

그림 4-11

3각형 AHI에서 밑변 HI는 1cm이고 그것의 높이 AG는 2cm입니다. 이 3각형의 면적은 1cm^{2}입니다. 그림 4—11에서 이런 종류의 3각형은 CHG, AFI, GFC, GBC, IBA, CDG, IDA의 8개가 있습니다.

답. 그림 4—9에서 면적이 1cm^{2}인 3각형은 모두 24+8 = 32 (개)입니다.

실례 5. 그림 4—12는 8개의 못으로 된 불규칙적인 못방진입니다. 차례로 번호 1～8을 달아줍니다. 여기서 1, 3, 5; 2, 3, 4; 6, 7, 8은 각각 한 직선우에 놓입니다. 고무줄로 이 못들을 련결하면 몇개의 3각형을 만들수 있습니까?

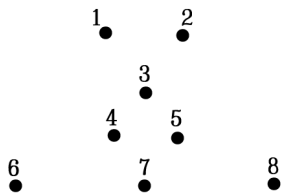



그림 4—12

따져보기와 풀기

만일 이 8개의 못을 고무줄로 련결한다면 그림 4—13이 얻어집니다. 그림 4—13에서 선분이 가로, 세로로 놓여있고 일정한 규칙이 없으므로 3각형을 세기가 힘듭니다. 그러므로 앞에서처럼 표를 그려서 풀어야 합니다. 즉 못번호를 기준으로 문제를 생각하여야 합니다. 서로 다른 못들은 서로 다른 3각형을 만듭니다. 문제에서 세 조의 못은 각각 한 직선우에 놓이므로 세 조의 못으로는 3각형을 만들지 못한다는데 주의를 돌려야 합니다.

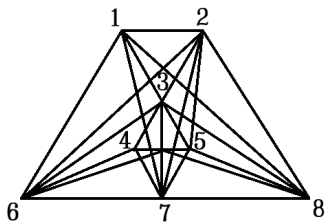



그림 4—13

① 못 1을 고정했다고 합시다. 못 1과 나머지못들의 결합을 쓰면 표 4—5와 같습니다.

표 4−5. 못 1과 나머지못의 결합

못 1 / 못번호	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)
2		0	0	0	0	0	0
3			0		0	0	0
4				0	0	0	0
5					0	0	0
6						0	0
7							0

표 4−5에서 《0》 표시는 서로 다른 못으로 된 3각형입니다. 표 4−5에는 모두 20개의 3각형이 있습니다. 즉 못 1이 고정되여있다고 생각하고 그밖의 나머지못을 결합시키면 20개의 3각형이 얻어집니다.

② 못 2를 고정합니다. 표 4−5에 있는 3각형과 반복되지 않도록 하기 위하여 못 1을 생각하지 말아야 합니다. 이것은 그림 4−12에서 못 1을 빼버린것과 같습니다. 못 2와 나머지못들이 결합되여 만들어지는 3각형은 표 4−6과 같습니다.

표 4−6. 못 2와 나머지못의 결합

못 2 / 못번호	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)
3			0	0	0	0
4			0	0	0	0
5				0	0	0
6					0	0
7						0

표 4−6에 14개의 3각형이 있습니다. 즉 못 2를 고정하면 그것과 나머지못을 결합시켜 14개의 3각형을 만들수 있습니다.

③ 못 3을 고정합니다. 표 4−6에 있는 3각형과 반복되지 않게 하기 위하여 못 2를 빼고 생각합니다. 못 3과

나머지못을 결합시켜 만들수 있는 3각형의 개수는 표 4－7과 같습니다.

표 4－7. 못 3과 나머지못들의 결합

못 3 / 못번호	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)
4		0	0	0	0
5			0	0	0
6				0	0
7					0

표 4－7에 모두 10개의 3각형이 있습니다. 즉 못 3을 고정시켰을 때 그것과 다른 못을 결합시켜 만들수 있는 3각형은 모두 10개 입니다.

④ 못 4를 고정하면 모두 6개의 3각형이 얻어집니다(표 4－8).

표 4－8. 못 4와 나머지못들의 결합

못 4 / 못번호	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)
5		0	0	0
6			0	0
7				0

⑤ 못 5을 고정합니다. 못 5와 나머지못을 결합시켜 만들수 있는 3각형은 모두 3개 입니다(표 4－9).

표 4－9. 못 5와 나머지못들의 결합

못 5 / 못번호	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)
6		0	0
7			0

나머지못 6, 7, 8은 한 직선우에 놓이므로 3각형을 만들지 못합니다.

답. 이 8개의 못으로 만들수 있는 3각형은 모두

$$20+14+10+6+3 = 53(\text{개})$$

입니다.

실례 6. 그림 4－14와 같이 12개의 못을 직4각형모양으로 배렬하였습니다. 서로 이웃한 두 못사이의 거리는 모두 1cm입니다. 이 못을 정점으로 하여 고무줄로 련결하면 3각형들이 얻어집니다. 이 3각형들가운데서 면적이 $3cm^2$인 3각형이 모두 몇개 있습니까?

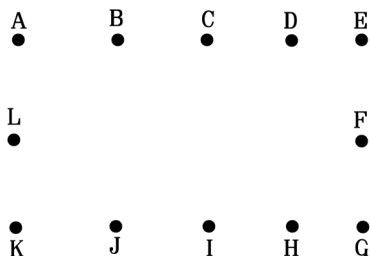



그림 4－14

따져보기와 풀기

글자 A, B, C···, L로써 12개의 못을 표시합니다. 3각형의 면적은 밑변×높이÷2이므로 문제의 조건에 따라 다음과 같은 몇가지 문제로 갈라서 생각할수 있습니다.

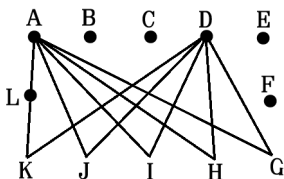



그림 4－15

그림 4－15에서 AK=EG=2(cm)이고 글자 A, B, C, D, E, K, J, I, H, G는 각각 한 직선우에 있으므로 BJ=CI=DH=2(cm) 입니다.

만일 이것을 3각형의 높이로 한다면 3각형의 면적이 $3cm^2$일 때 그것의 밑변은 3cm이여야 합니다. 밑변을 AB가 놓여있는 직선우에서 취하면 길이가 3cm인 선분은 AD와 BE입니다. AD를 밑변으로 하고 K, J, I, H, G를 정점으로 취하면 면적이 $3cm^2$인 3각형이 5개 얻어집니다. 꼭같이 밑변이 BE이고 정점이 K, J, I, H, G인 3각형도 5개 입니다. 반대로 밑변이 KH, JG이고 정점이 A, B, C, D, E인 3각형이 10개 얻어집니다(면적은 모두 $3cm^2$입니다).

그림 4－14에서 밑변이 2cm이고 높이가 3cm인 3각형을 얻을수 있습니다. 그림 4－16에서 3각형 LDH, FJB가 이러한 3각형입니다.

이때 BJ=DH=2(cm)이고 그것의 높이는 AD, BE의 길이와 같습니다. 그러므로 그림 4－16에는 면적이 $3cm^2$인 3각형이 두개 있습니다.

그림 4－16

이 두가지 3각형들은 모두 규칙적인 3각형입니다. 이제 다른 형태의 3각형이 없는가를 찾아봅시다. 직4각형 AEGK의 면적은 $2\times4=8\ (cm^2)$입니다. 만일 그림 4－17과 같이 직4각형 AEGK를 4개의 3각형으로 가른다면 3각형 ACK, CEF, FGK의 면적은 각각 $2cm^2$, $1cm^2$, $2cm^2$가 됩니다. 이리하여 $8-2-1-2=3\ (cm^2)$가 됩니다. 3각형 CFK의 면적도 $3cm^2$가 됩니다

그림 4－

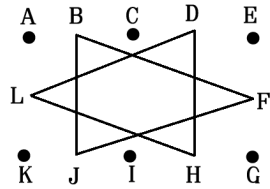
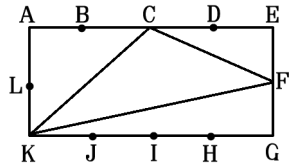
그림 4－17에서 이러한 3각형은 또한 CLG, AIF, ELJ입니다.

답. 그림 4－14에 고무줄로 련결하여 만들수 있는 면적이 $3cm^2$인 3각형은 모두

$$20+2+4=26\ (개)$$

있습니다.

[**설명**] 우의 몇가지 실례를 통하여 알수 있는바와 같이 도형의 개수를 빨리 정확히 세려면 반드시 분류하여 계산해야 한다는 생각을 가지고 못의 위치와 고무줄사이의 관계를 잘 따져보고 그것들사이의 규칙을 찾아야 합니다. 이렇게 하여야 복잡한 문제와 맞다들었을 때 반복되지도 않으면서 빼놓지도 않고 정확히 계산할수 있습니다.

실례 7. 그림 4－18에서 바른4각형은 9개의 꼭 같은 바른4각형으로 갈라져있습니다. 거기에 모두 16개의 정점

(공통정점은 한개로 봅니다)이 있는데 한 직선우에 놓이지 않는 3개의 정점을 련결하면 3각형이 얻어집니다. 이 3각형에서 빗선을 친 3각형과 면적이 꼭 같은 3각형이 몇개 있습니까?

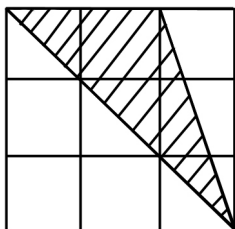



그림 4－18

따져보기와 풀기

바른4각형의 매 정점을 글자로 표시하고 매 작은 바른4각형의 한변의 길이를 1cm로 생각하면 그림 4－18에서 빗선을 친 3각형의 면적은

$$\text{밑변} \times \text{높이} \div 2 = 2 \times 3 \div 2 = 3(cm^2)$$

가 됩니다.

3각형의 면적공식에 의하여 면적이 $3cm^2$인 3각형을 다음과 같은 두가지 경우로 갈라볼수 있습니다. 그 하나는 밑변의 길이가 2cm이고 높이가 3cm인 3각형이고 (그림 4－20에서 3각형 ACH) 다른 하나는 밑변의 길이가 3cm이고 높이가 2cm인 (그림 4－21에서 3각형ADN) 3각형입니다.

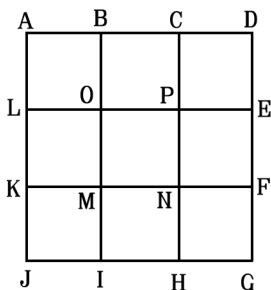



그림 4－19

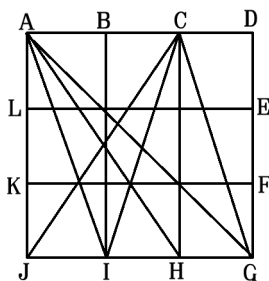



그림 4－20

첫번째 경우: 밑변의 길이가 2cm인 밑변은 AC, BD이고 그것에 대응하는 3각형의 다른 한 정점은 G, H, I, J입니다. 즉 밑변이 AC이고 높이가 3cm인 3각형은 ACJ, ACI, ACH, ACG입니다(그림 4－20). 마찬가지로 밑변이 BD이고

높이가 3cm인 3각형은 BDG, BDH, BDI, BDJ입니다. 모두 $2\times4=8$(개)입니다. 바른4각형의 네 변의 대칭성에 의하여 밑변의 길이가 2cm이고 높이가 3cm인 3각형은 모두 $2\times4\times4=32$ (개) 입니다.

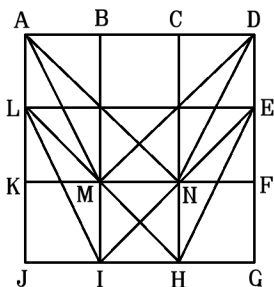
그림 4 - 21

두번째 경우: 밑변의 길이가 3cm인 밑변은 AD, LE이고 이것에 대응하는 3각형의 다른 한 정점은 K, M, N, F와 J, I, H, G입니다. 즉 밑변이 AD이고 높이가 2cm인 3각형은 ADK, ADM, ADN, ADF(그림 4－21) 입니다.

그런데 3각형 ADK, ADF는 첫번째 경우에 이미 계산되였습니다. 즉 밑변이 2cm이고 높이가 3cm인 3각형은 빼야 합니다. 마찬가지로 두번째 경우에 속하는 3각형으로는 LEI, LEH가 있습니다. 따라서 모두 $2\times2=4$ (개) 있습니다. 바른4각형의 네 변의 대칭성에 의하여 밑변의 길이가 3cm이고 높이가 2cm인 3각형은 $2\times2\times4=16$ (개) 있습니다.

그림 4－18에서 빗선을 친 3각형과 면적이 꼭같은 3각형은 모두

$$2\times4\times4+2\times2\times4=32+16=48\ (개)$$

있습니다.

련습 4

1. 그림 4－22는 8개의 못으로 된 못방진입니다. 이 못들을 고무줄로 련결한다면 몇개의 선분이 얻어지겠습니까?

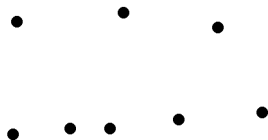



그림 4 - 22

2. 그림 4－23에서 서로 이웃한 두 못사이의 거리가 모두 같은 못방진을 고무줄로 련결한다면 각각 몇개의 3각형과 바른4각형이 얻어지겠습니까?

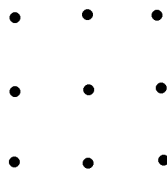
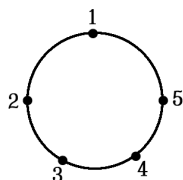



그림 4－23　　그림 4－24

3. 그림 4－24와 같이 원둘레우에 있는 5개의 못들가운데서 임의로 3개의 못을 고무줄로 련결합니다.
① 정점이 못 1인 3각형은 몇개 입니까?
② 5개의 못들가운데서 임의로 3개의 못을 고무줄로 련결하면 몇개의 3각형이 얻어지겠습니까?

4. 그림 4－25는 서로 이웃한 가로, 세로의 두줄사이거리가 모두 꼭 같은 4×6인 직4각형모양의 못방진입니다. 서로 다른 몇개의 바른4각형을 만들수 있겠습니까?

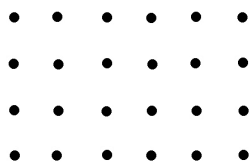
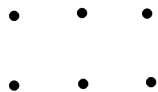



그림 4 － 25

5. 그림 4－23에서 만일 두 못사이의 거리가 모두 1cm이라면 3개의 못을 련결하여 3각형을 만들 때 면적이 2cm^{2}인 3각형을 몇개 만들수 있겠습니까?

6. 그림 4－26에서 못과 못사이의 거리는 2cm입니다. 고무줄로써 3개의 못을 련결하여 3각형을 만든다면 이 3각형들가운데서 면적이 4cm^{2}인 3각형은 몇개 있겠습니까?

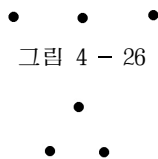



그림 4 － 26

7. 그림 4－27은 10개의 못으로 된 바른3각형모양의 못방진입니다. 서로 다른 3각형을 몇개 만들수 있겠습니까?

그림 4 － 27

8. 그림 4－28에서 원둘레우에 9개의 못이 있습니다. 서로 다른 3각형을 몇개 만들수 있겠습니까?

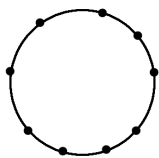



그림 4－28

9. 그림 4－29는 가로, 세로방향으로 서로 이웃한 점들을 련결하면 모두 꼭같이 《+》자형 못방진입니다. 이 못들을 련결하여 서로 다른 바른4각형을 몇개 만들수 있겠습니까?

10. 그림 4－30과 같이 10개의 못으로 직4각형모양의 못방진을 만들었습니다. 서로 이웃한 두 못사이의 거리는 모두 2cm입니다. 이 못들을 정점으로 하는 3각형을 만든다면 이와 같은 3각형들가운데 면적이 8cm^{2}인 3각형이 모두 몇개 있겠습니까?

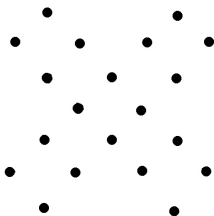
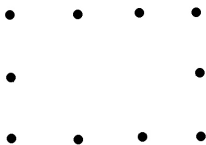



그림 4－29　　　그림 4－30

답

1. 28개의 선분이 있습니다.
2. 바른3각형은 76개이고 바른4각형은 6개 입니다.
3. ① 6개　② 10개　4. 40개　5. 8개　6. 32개　7. 105개
8. 84개　9. 21개　10. 22개

제5절. 평균값과 그 응용

평균값문제는 일상생활에서 자주 쓰입니다. 실례를 들면 학과목성적의 평균값을 리용하여 학생들의 성적, 학급들사이의 성적을 평가하기도 합니다. 평균값문제는 평균점수를 구하는데 쓰일뿐아니라 여러 분야에 널리 리용됩니다. 서로 다른 구역에서의 어린이들의 평균키, 평균몸무게에 의하여 어린이들의 키크기, 발육상태를 알아보기도 합니다. 공업이나 농업에서는 월평균생산량, 정보당 평균수확량 등을 계산하는데 쓰입니다. 이때 다음의 관계식이 성립합니다.

$$\text{총 수량} \div \text{총 몫수} = \text{평균값}$$

실례 1. 어떤 한 학생의 경연성적은 다음과 같습니다(채점기준은 100점을 만점으로 하였습니다). 79, 82, 73, 53, 95, 97, 80, 100, 74, 87일 때 이 학생의 평균성적은 얼마입니까?

따져보기와 풀기 1:

평균값의 기본관계식에 따라 10번의 경연 총 점수를 구한 다음 경연회수로 나누면 됩니다.

$$(79+82+73+53+95+97+80+100+74+87)\div 10$$
$$=820\div 10=82\ (\text{점})$$

따져보기와 풀기 2:

평균값을 가정한 다음 매 성적과 평균값의 차를 계산하여 평균값을 구하는 방법을 봅시다. 10개의 성적가운데서 먼저 중간수 실례를 들면 80을 평균값으로 가정합니다. 다음 매 경연의 시험성적과 80사이의 차를 계산합니다. 마지막에 이 차의 총합을 시험회수로 나누고 평균값을 더하면 구하려는 평균값이 됩니다.

$$80+(-1+2-7-27+15+17+0+20-6+7)\div 10$$
$$=80+(-41+61)\div 10= 80+20\div 10= 82\ (\text{점})$$

답. 이 학생의 평균성적은 82점입니다.

실례 2. 수학경연에 참가한 학생들중에서 1명은 95점을 받았고 3명은 91점을 받았으며 4명은 81점, 2명은 74점을 받았습니다. 이 학생들의 평균성적은 얼마입니까?

따져보기와 풀기

먼저 이 학생들의 총 성적과 학생수를 알아야 합니다.

$$(95+91\times3+81\times4+74\times2)\div(1+3+4+2)$$
$$=(95+273+324+148)\div10$$
$$=840\div10=84\ (\text{점})$$

답. 이 학생들의 평균성적은 84점입니다.

실례 3. 영희가 학기말시험을 5과목 쳤는데 수학성적은 공개되지 않았습니다. 나머지 네 과목의 평균성적은 90점입니다. 여기에 수학성적을 합치면 다섯과목의 평균성적은 92점입니다. 수학성적은 얼마입니까?

따져보기와 풀기

몇개 과목의 평균성적을 알면 이 몇개 과목의 총 성적을 알수 있습니다. 다섯과목의 총 성적과 네 과목의 총 성적의 차가 곧 수학성적이 됩니다.

$$92\times5-90\times4=460-360=100\ (\text{점})$$

이 문제를 다른 방법으로도 풀수 있습니다. 다섯과목의 평균성적이 92점이므로 다섯과목의 총 성적을 5개의 92로 등분할수 있습니다. 그중에서 4개의 92는 네 과목의 총 성적보다 8점이 더 많습니다. 그러므로 수학성적은

$$92+(92-90)\times4=100\ (\text{점})$$

입니다.

※ 다른 풀이법을 더 생각해보십시오.

실례 4. 광진이가 등산하는데 산에 올라갈 때에는 한시간에 2km씩 가고 산에서 내려올 때에는 한시간에 6km씩 내려옵니다. 산에 오를 때와 내릴 때의 평균속도는 얼마입니까?

따져보기와 풀기

만일 평균속도를 $(2+6)\div2=4$(km/h)로 계산한다면 이

것은 틀립니다. 왜냐하면 이것은 속도의 평균값이지 평균속도는 아니기때문입니다. 평균속도를 구하려면 반드시 총 거리를 총 시간으로 나누어야 합니다. 총 거리는 산에 올라간 거리와 내려온 거리의 합입니다. 산에 올라갈 때의 거리를 S라고 하면 전체 거리는 2S로 됩니다. 산에 올라갈 때의 시간은 $\frac{S}{2}$이고 산에서 내려오는데 걸린 시간은 $\frac{S}{6}$입니다. 그러므로 산에 오르내리는데 걸리는 총 시간은 $\frac{S}{2}+\frac{S}{6}$입니다. 따라서 평균속도는

$$2S \div \left(\frac{S}{2}+\frac{S}{6}\right) = 2S \div \frac{4}{6}S = 2S \times \frac{6}{4}S = 3(\text{km/h})$$

입니다.

이 문제를 다른 방법으로도 계산할수 있습니다.

조건에서 주어지지 않은 총 거리를 계산에 편리한 수로 가정합니다. 실례를 들면 산에 올라가는 거리를 6km, 12km, 18km 등으로 가정할수 있습니다. 어느 거리를 리용해도 평균속도는 같아집니다.

산에 올라가는 거리를 12km로 가정합시다. 이때 산에 올라갔다가 내려오는 총 거리는 24km입니다. 산에 올라가는데 걸리는 시간은 12÷2=6시간이고 내려오는데 걸리는 시간은 12÷6=2시간입니다. 따라서 평균속도를 쉽게 구할수 있습니다.

$$12\times2\div(12\div2+12\div6) = 24\div8 = 3\ (\text{km/h})$$

답. 광진이가 산을 오르내릴 때의 평균속도는 3km/h입니다.

실례 5. 자연수 1, 2, 3, 4, …, 998, 999를 세 조로 가릅니다. 매 조의 평균값이 꼭 같다면 이 3개 평균값의 합은 얼마입니까?

따져보기와 풀기

수 1, 2, 3, …, 998, 999는 련이어 있는 자연수입니다. 수1로부터 련이어 있는 자연수의 평균값은 어떤 특성을 가지겠습니까? 이제 이 문제의 범위를 줄여서 《1, 2, 3, …, 9의 9개 수를 세 조로 갈랐을 때 매 조의 평균값이 꼭 같아야 한다면 매 조의 평균값은 얼마입니까?》로 고쳐서 생각해봅시다. 매 조의 평균값은 모두 같아야 하므로 이 평균값의 합의 평균값은 총 평균값과 같아야 합니다.

이 9개 수의 총 평균값은

$$(1+2+3+\cdots+9)\div 9=45\div 9=5$$

로서 이 수렬의 가운데수와 같습니다. 이것은

$$(1+9)\div 2=5$$

과 같이 계산됩니다. 이로부터 다음과 같은 사실을 이끌어낼수 있습니다. 수 1로부터 련이어 있는 자연수의 평균값은 (첫번째 수+마지막 수)÷2에 의하여 얻을수 있습니다.

만일 련이어 있는 홀수개의 자연수이면 평균값은 이 수렬의 가운데수입니다.

본 문제로 돌아갑시다. 매 조의 평균값은 모두 같으므로 이 조들의 평균값의 합의 평균값은 총 평균값과 같아야 합니다. 총 평균값은

$$(1+999)\div 2=500$$

이므로 세 평균값의 합은 $500\times 3=1500$입니다.

답. 세 평균값의 합은 1500입니다.

실례 6. 어떤 기계공장에 세개의 직장이 있습니다. 제1직장에는 로동자가 120명 있고 한달에 7200대의 기계를 생산합니다. 제2직장에는 로동자가 114명 있고 한달에 7068대의 기계를 생산하며 제3직장에는 140명의 로동자가 있고 한달에 10042대의 기계를 생산합니다. 세 직장의 매 로동자는 한달에 평균 몇대의 기계를 생산하겠습니까?

따져보기와 풀기

먼저 세 직장의 한달생산량을 구하고 세 직장의 로동

자수를 구해야 합니다. 총 생산량을 공장로동자수로 나누면 세 직장의 매 로동자의 한달평균생산량이 얻어집니다.

$$(7200+7068+10042)\div(120+114+140)$$
$$=24310\div374=65\ (\text{대})$$

답. 세 직장의 매 로동자의 한달평균생산량은 65대입니다.

실례 7. 100점을 만점으로 하는 수학경연에 참가한 윤미는 두차례의 시험에서 평균 85점을 받았고 다음번 세차례의 시험에서 받은 평균점수는 90점입니다. 윤미가 받은 다섯차례의 시험점수의 평균값은 얼마입니까?

따져보기와 풀기

첫 두차례 시험의 평균점수에 의하여 총 점수를 구할수 있습니다. 마찬가지로 세차례의 시험에서 받은 총 점수도 계산할수 있습니다. 이 두번에 걸쳐 받은 총 점수를 시험회수로 나누면 평균점수가 얻어집니다.

식을 세워 계산하면 다음과 같습니다.

$$(85\times2+90\times3)\div(2+3)=440\div5=88\ (\text{점})$$

답. 5차례의 시험에서 윤미가 받은 평균점수는 88점입니다.

실례 8. 광진이가 다섯과목시험에서 받은 점수는 다음과 같습니다. 표 5－1에서 보는바와 같이 수학점수란은 비여있습니다. 수학시험점수는 다섯과목의 평균점수보다 4점이 더 많습니다. 광진이의 수학점수는 얼마입니까?

표 5－1

국어	수학	지리	자연	력사
83		74	71	64

풀기 광진이의 수학점수를 x라고 하면 문제의 조건에 의하여

$$x-(83+x+74+71+64)\div5=4$$

이 됩니다. 덜릴수와 더는수의 차사이의 관계에 의하여 웃식은

$$x-4=(83+x+74+71+64)\div 5$$

이 됩니다. 곱하기와 나누기의 거꿀계산에 의하여

$$5\times(x-4)=83+x+74+71+64$$

가 됩니다. 정돈하면

$$4x = 83+74+71+64+4\times 5$$

$$x = (83+74+71+64+5\times 4)\div 4$$

이 됩니다.

$$x = 312\div 4$$

$$x = 78$$

답. 광진이의 수학점수는 78점입니다.

련습 5

1. 달리기선수들의 키가 150, 145, 151, 149, 147, 145, 143, 144, 143, 144cm입니다. 이 달리기선수의 평균키는 얼마입니까? 두가지 방법으로 풀어보십시오.
2. 세 논이 있습니다. 첫번째 논의 면적은 25정보이고 정보당 평균생산량은 8200kg이고 두번째 논의 면적은 15정보이고 정보당 평균생산량은 7600kg이며 세번째 논의 면적은 60정보이고 정보당 평균생산량은 7800kg입니다. 이 세 논의 정보당 평균생산량은 얼마입니까?
3. 자전거선수가 두 도시사이를 달리면서 훈련을 합니다. 도시 A로부터 도시 B로 갈 때는 한시간에 15km씩 가고 도시 B로부터 도시 A로 돌아올 때는 한시간에 10km씩 갑니다. 이 선수의 평균달리기속도는 얼마입니까?
4. 윤미는 력사, 국어, 수학, 자연, 영어 5개 과목의 학기말시험을 쳤는데 그 평균점수는 89점입니다. 력사와 수학의 두 과목의 평균점수는 91점이며 국어, 자연 두 과목 평균점수는 84점입니다. 력사와 자연, 두 과목의 평

균점수는 86점이며 자연은 국어보다 10점 더 많습니다. 이 다섯개 과목의 점수는 각각 얼마입니까?

5. 세 사람의 평균나이가 22살이며 18살보다 아래인 사람은 없습니다. 가장 나이가 많은 사람의 나이는 몇살입니까?
6. 5개 수의 평균값은 9입니다. 만일 그가운데서 한개 수를 1로 고치면 이 5개 수의 평균값이 8이 됩니다. 고치기전의 본래 수는 얼마입니까?
7. 서로 다른 두 지함 A, B에 사탕이 있는데 매 지함에 들어있는 사탕값은 같습니다. 지함 A의 사탕은 1kg에 6원이고 지함 B의 사탕값은 1kg에 4원입니다. 만일 두 지함에 들어있는 사탕을 섞어서 혼합한다면 1kg의 값이 얼마이겠습니까?

답

1. 147cm 2. 7870kg 3. 12km/h
4. 력사시험점수 83, 수학시험점수 99, 자연시험점수 89, 국어시험점수 79, 영어시험점수 95
5. 세 사람의 나이합은 $22\times3=66$살입니다. 세 사람중에서 나이가 제일 적은 사람은 18살이므로 그중 두 사람의 나이를 18살이라고 하면 다른 한 사람의 나이가 제일 많습니다. 즉

$$22\times3-18\times2=30\ (\text{살})$$

답. 가장 나이가 많은 사람은 30살입니다.

6. 5개 수의 평균값은 9이므로 5개 수의 합은 $9\times5=45$입니다. 그중에서 한개 수를 1로 고쳤으므로 5개 수의 평균값은 8이고 이 5개 수의 합은 $8\times5=40$입니다. 고쳐진 수는 $45-40=5$만큼 작아졌으므로 고쳐지기전의 수는 $1+5=6$ 입니다. 즉

$$1+(9\times5-8\times5)=1+45-40=6$$

답. 고쳐지기전의 본래 수는 6입니다.

7. 편리하게 계산하기 위하여 지합 A와 지합 B의 사탕값이 각각 12원이라고 생각합시다. 이때 지합 A의 사탕은 $12 \div 6 = 2$ (kg) 이고 지합 B의 사탕은 $12 \div 4 = 3$(kg)입니다. 지합 A의 사탕과 지합 B의 사탕값을 A, B의 총 무게로 나누면 혼합된 사탕값이 얻어집니다. 즉

$$12 \times 2 \div (12 \div 6 + 12 \div 4) = 4.8 \text{ (원)}$$

답. 혼합된 사탕 1kg의 값은 4.8원입니다.

제6절. 가정법에 의한 응용문제풀기

가정법은 흔히 쓰는 풀기방법입니다. 가정법을 써서 응용문제를 풀려면 문제의 조건으로부터 어떤 가정을 세워야 하겠는가를 정확히 판단하여야 합니다 (일반적으로 구하려는 두 량 또는 몇개의 미지수가 같다고 가정하거나 또는 구하려는 두 미지량이 같은 량이라고 가정합니다). 다음 이 가정에 의하여 수량들사이에 어떤 변화가 있는가에 주목을 돌리고 주어진 조건과 변화된 수량관계를 비교해서 적당히 조절하여 결과를 얻어냅니다.

실례 1. 윤미에게 10원짜리 종이돈과 50원짜리 종이돈이 모두 35장 있는데 모두 950원입니다. 두가지 돈이 각각 몇장씩 있습니까?

따져보기와 풀기

35장의 종이돈이 모두 10원짜리라고 가정하면 총 금액은 $10 \times 35 = 350$원이므로 본래 돈과의 차는 $950 - 350 = 600$원입니다. 이 차는 50원짜리 종이돈을 10원짜리 종이돈으로 계산한데서 생긴것이며 50원짜리 한장을 10원짜리 한장으로 계산하면 40원이 모자랍니다. 모자라는 600원이

50원짜리 몇장에 해당하는가를 알아야만 50원짜리 종이돈의 장수가 결정됩니다.

$$(950-350)\div(50-10)=600\div40=15\ (장)$$

10원짜리 종이돈의 장수는 $35-15=20$ (장)입니다.

답. 50원짜리 종이돈 15장, 10원짜리 종이돈이 20장입니다.

실례 2. 리선생님은 51명의 학생들과 함께 뽀트놀이장에 갔습니다. 선생님은 11척의 뽀트를 주문하였는데 큰 뽀트에 6명이 타고 작은 뽀트에 4명이 탈수 있습니다. 큰 뽀트와 작은 뽀트가 각각 몇척씩 있어야 하겠습니까?

풀기 11척의 뽀트가 모두 큰 뽀트라고 가정하면 탈수 있는 학생은 모두 $6\times11=66$ (명)입니다. 그러면 실제 학생수보다

$$66-(51+1)=14\ (명)$$

이 더 많습니다.

큰 뽀트에 탈수 있는 학생수와 작은 뽀트에 탈수 있는 학생수의 차는

$$6-4=2\ (명)$$

입니다. 작은 뽀트에 태운다면

$$14\div2=7\ (척)$$

이 필요합니다.

이때 필요한 큰 뽀트는

$$11-7=4\ (척)$$

입니다.

종합하면 다음과 같습니다.

$$[6\times11-(51+1)]\div(6-4)$$
$$=(66-52)\div2=7\ (척)$$
$$11-7=4\ (척)$$

답. 작은 뽀트 7척과 큰 뽀트 4척입니다.

실례 3. 송이버섯을 따는데 개인날에는 매일 20송이씩 딸수 있고 비내리는날에는 매일 12송이씩 딸수 있습니다. 며칠동안에 모두 112송이를 땄습니다. 매일 평균 14송이씩 땄다면 비가 내린 날이 며칠이겠습니까?

풀기 송이버섯을 112송이 따는데 걸린 날자수는

$$112 \div 14 = 8 \text{ (일)}$$

비내린 날자수를 8일간이라고 하면 이 기간에 딴 송이버섯은

$$12 \times 8 = 96 \text{ (송이)}$$

입니다. 실제로 딴 송이수보다

$$112 - 96 = 16 \text{ (송이)}$$

더 작습니다.

개인날과 비가 내린 날에 딴 버섯의 차는

$$20 - 12 = 8 \text{ (송이)}$$

입니다. 개인날을 비온 날로 바꾸면

$$16 \div 8 = 2 \text{ (일)}$$

입니다. 실제로 비가 온 날은

$$8 - 2 = 6 \text{ (일)}$$

입니다. 종합하면 다음과 같습니다.

$$112 \div 14 - (112 - 12 \times 8) \div (20 - 12) = 6 \text{ (일)}$$

답. 비가 내린 날은 6일간입니다.

실례 4. 수학경연에 참가한 윤미가 모두 25문제를 풀었습니다. 한 문제가 맞으면 4점씩 얻고 한 문제가 틀리면 2점을 삭감합니다. 윤미가 받은 점수합은 58점입니다. 윤미는 몇개 문제를 틀리게 풀었습니까?

따져보기와 풀기

윤미가 푼 25문제가 다 맞았다고 가정합시다. 윤미는 $25 \times 4 = 100$점을 받아야 합니다. 이 점수는 윤미가 받은 점수보다 $100 - 58 = 42$(점)이 더 많습니다. 이와 같은 차가 생기게 된것은 틀리게 푼 문제를 정확히 푼 문제로 계산하였기때문입니다. 한 문제가 틀리면 $4 + 2 = 6$ (점)을 적게 받

게 됩니다. 그러므로 윤미가 틀리게 푼 문제는 42÷6=7 문제입니다.

$$(4\times25-58)\div(4+2)=42\div6=7\ (\text{문제})$$

답. 윤미가 틀리게 푼 문제는 7문제입니다.

실례 5. 3대의 화물자동차로 910t의 세멘트를 건설장에 운반하려고 합니다. 첫번째 자동차는 두번째 자동차보다 30t을 더 운반하였고 세번째 자동차는 두번째 자동차보다 20t을 적게 운반하였습니다. 3대의 자동차가 각각 몇t씩 운반하였겠습니까?

따져보기와 풀기 1:

3대의 자동차가 운반한 세멘트량이 꼭 같다고 합시다.

첫번째 자동차가 운반한 세멘트량을 기준으로 하면 두번째 자동차가 30t을 더 많이 운반하였고 세번째 자동차는 20+30=50(t)을 더 운반한것으로 됩니다.

이렇게 보면 전체 운반량은 실제운반량보다 50+30=80t을 더 운반한것으로 됩니다.

첫번째 자동차가 운반한 량은

$$[910+30+(30+20)]\div3=990\div3=330\ (t)$$

이고 두번째 자동차가 운반한 량은

$$330-30=300\ (t)$$

이며 세번째 자동차가 운반한 량은

$$300-20=280\ (t)$$

입니다.

따져보기와 풀기 2:

첫번째와 세번째 자동차의 운반량이 두번째 자동차의 운반량과 같다고 가정하고 두번째 자동차의 운반량을 기준으로 잡을수 있습니다. 첫번째 자동차는 세멘트를 30t 적게 운반하였고 세번째 자동차는 20t을 더 많이 운반하였습니다. 따라서 세 자동차가 운반한 총량은 실제보다 30－20=10 (t) 이 적습니다.

$(910-30+20)\div3=900\div3=300\ (t)$ (두번째 자동차)

$$300+30=330\ (t) \qquad (\text{첫번째 자동차})$$
$$300-20=280\ (t) \qquad (\text{세번째 자동차})$$

답. 첫번째 자동차는 330t 운반하였고 두번째 자동차는 300t 운반하였으며 세번째 자동차는 280t 운반하였습니다.

실례 6. 큰 통과 작은 통이 모두 50개 있습니다. 큰 통에는 사과즙이 4kg 들어갈수 있고 작은 통에는 사과즙이 2kg 들어갈수 있습니다. 전체적으로 볼 때 큰 통들에는 작은 통들보다 20kg을 더 넣을수 있습니다. 큰 통과 작은 통은 각각 몇개씩 있습니까?

따져보기와 풀기 1:

50개의 통이 모두 큰 통이라고 하면 사과즙이 모두 200kg 있는것으로 됩니다.

조건에 비추어보면 주어진것보다 200－20=180 (kg)이 더 많습니다. 만일 큰 통을 작은 통으로 바꾼다면 한개 통에 큰 통이 들어있는 사과즙은 4kg 줄어든것으로 되고 작은 통에 들어있는 사과즙은 2kg 많아진것으로 됩니다. 큰 통은 작은 통보다 4+2=6 (kg) 줄어든것으로 됩니다. 그러므로 몇개의 큰 통을 작은 통으로 바꾸는것이 더 쉽습니다.

$$(4\times50-20)\div(4+2)=180\div6=30\ (\text{개}) \qquad (\text{작은 통})$$
$$50-30=20\ (\text{개}) \qquad (\text{큰 통})$$

따져보기와 풀기 2:

매개 큰 통은 작은 통보다 2kg씩 더 담을수 있습니다. 만일 큰 통과 작은 통의 개수가 같다면 큰 통에는 작은 통보다 20kg을 더 담을수 있으므로 큰 통과 작은 통은 각각

$$20\div(4-2)=10\ (\text{개})$$

여야 합니다.

주어진 50개의 통가운데서 나머지 50－10×2=30 (개)의 통안에 있는 사과즙의 량은 같을것이며 큰 통안에 있는 사과즙은 작은 통안에 있는 사과즙의 4÷2=2배로 됩니다. 따라서 30개의 통가운데서 작은 통의 개수는 큰 통의 개수의 2배여야 합니다.

$$20 \div (4-2) = 10\ (개)$$
$$(50-10 \times 2) \div (1+2) = 30 \div 3 = 10\ (개)$$
$$10+10 = 20\ (개) \quad (큰\ 통)$$
$$50-20 = 30\ (개) \quad (작은\ 통)$$

답. 큰 통은 20개이고 작은 통은 30개 입니다.

실례 7. 720명의 선생님들과 학생들이 만경대견학을 갑니다. 큰 뻐스에는 작은 뻐스보다 20명이 더 탈수 있고 큰 뻐스 6대에 탄 인원수는 작은 뻐스 8대에 탄 인원수와 같습니다. 만일 선생님들과 학생들이 작은 뻐스에 다 탄다면 작은 뻐스가 몇대 있어야 하겠습니까? 만일 큰 뻐스에 탄다면 큰 뻐스가 몇대 있어야 하겠습니까?

따져보기와 풀기

작은 뻐스가 몇대, 큰 뻐스가 몇대인가를 알려면 작은 뻐스와 큰 뻐스에 각각 몇명씩 탈수 있는가를 먼저 알아야 합니다.

문제의 조건에 의하면 만일 6대의 큰 뻐스를 6대의 작은 뻐스로 바꾼다면 20×6=120(명)이 타지 못합니다. 이 120명을 태우려면 2대의 작은 뻐스가 더 있어야 합니다, 이로부터 작은 뻐스에 몇명이 탈수 있는가를 알수 있고 따라서 큰 뻐스에 몇명이 탈수 있는가 하는것도 알아낼수 있습니다.

$$20 \times 6 \div (8-6) = 120 \div 2 = 60\ (명)$$
$$720 \div 60 = 12\ (대)$$
$$720 \div (60+20) = 9\ (대)$$

답. 만일 선생님들과 학생들이 모두 작은 뻐스에 탄다면 12대의 작은 뻐스가 있어야 하고 큰 뻐스에 탄다면 9대의 큰 뻐스가 있어야 합니다.

실례 8. 윤미와 윤선이가 함께 줄넘기를 합니다. 윤미가 먼저 3분동안 줄넘기를 한 다음 두 사람이 함께 2분동안 하였는데 모두 610번 넘었습니다. 윤미는 윤선이보다 1분동안에 10번씩 더 많이 넘었습니다. 윤미는

윤선이보다 몇번 더 많이 넘었겠습니까?

따져보기와 풀기 1:

문제의 요구대로 윤미가 윤선이보다 모두 몇번 더 넘었는가를 구하려면 윤미와 윤선이가 1분동안에 몇번씩 넘었는가를 알아야 합니다.

윤미가 1분에 몇번씩 넘었는가를 구하는데 편리하도록 윤미와 윤선이가 1분동안에 넘는 회수가 같다고 가정합니다. 그리고 윤미를 기준으로 하면 윤선은 실제로 넘은 회수보다 10×2=20 (번) 더 넘은것으로 됩니다. 이렇게 하여 윤미와 윤선이가 주어진 시간동안에 넘은 총 회수도 변화됩니다. 즉 610+20=630 번 넘은것으로 됩니다. 윤미와 윤선이가 넘은 회수는 같고 총 시간이 주어졌으므로 윤미가 1분동안에 넘은 회수를 구할수 있습니다. 따라서 윤미가 윤선이보다 몇번 더 넘었는가 하는것도 구해집니다.

$$(610+10\times2)\div(3+2\times2)=630\div7=90\ (\text{번})$$
$$90\times3+10\times2=270+20=290\ (\text{번})$$

따져보기와 풀기 2:

윤선이가 1분동안에 몇번 넘었는가를 먼저 구할수 있습니다. 이때 윤미가 1분동안에 넘은 회수가 윤선이가 1분동안에 넘은 회수와 같다고 가정할수 있습니다. 윤선이를 기준으로 잡으면 윤미는 실제 넘은 회수보다 10×(3+2)=50 번 적게 넘은것으로 됩니다. 즉 두 사람은 주어진 시간동안에 50번 적게 넘은것으로 됩니다.

$$[610-10\times(3+2)]\div(3+2\times2)=560\div7=80\ (\text{번})$$
$$(80+10)\times3+10\times2=270+20=290\ (\text{번})$$

답. 윤미는 윤선이보다 290번 더 넘었습니다.

실례 9. 윤호가 할머니네집에 가는데 떠날 때 시계를 보았더니 1분동안에 80km씩 걸어가면 도착해야 할 시간보다 5분 늦게 도착하고 자전거를 타고 1분동안에 200m씩 달린다면 7분 먼저 도착할수 있습니다. 윤미가 집

에서 떠날 때 도착해야 할 시간보다 몇분전에 시계를 보았겠습니까?

풀기 1: 윤호가 5분동안에 걸어가는 거리는 $80\times 5=400$m 입니다. 윤호가 자전거를 타고 7분동안 달리는 거리는 $200\times 7=1400$m입니다.

그러므로 떠날 때부터 제 시간내에 자전거를 타고 간다면 걸어가는것보다

$$1400+400=1800\ (m)$$

를 더 가게 됩니다.

자전거를 타고가면 걸어가는것보다 1분동안에

$$200-80=120(m)$$

씩 더 갑니다.

1800m를 몇분이면 갈수 있겠습니까?

$$1800\div 120=15\ (\text{분})$$

종합하면 다음과 같습니다.

$$(80\times 5+200\times 7)\div(200-80)=15\ (\text{분})$$

풀기 2: 윤호가 예견한 시간보다 60분전에 떠났다고 가정하면 할머니의 집까지 걸어간다고 할 때

$$80\times(60+5)=80\times 65=5200\ (m)$$

이며 자전거를 타고가는것으로 계산하면

$$200\times(60-7)=200\times 53=10600\ (m)$$

입니다. 두가지 방법에서의 계산차는

$$10600-5200=5400\ (m)$$

입니다. 이것은 가정한 60분은 지나치게 길다는것을 보여줍니다. 1분간의 거리차는 $200-80=120$m입니다. 5400m 안에 몇개의 120m가 있겠습니까?

$$5400\div 120=45\ (\text{분})$$

그러므로 윤호가 집에서 떠날 때 시계는 도착해야 할 시간보다

$$60-45=15\ (\text{분})$$

전을 가리키고있었습니다.

답. 윤미는 도착해야 할 시간보다 15분전에 시계를 보았습니다.

실례 10. 유치원에서 교양원이 귤과 사과를 어린이들에게 나누어주는데 귤은 사과의 3배입니다. 만일 매 어린이에게 사과 3알과 귤 7알씩 나누어준다면 사과는 다 나누어줄수 있으나 귤은 42알 남습니다. 귤과 사과는 각각 몇알씩 있었겠습니까?

따져보기와 풀기

귤과 사과가 각각 몇알씩 있었겠는가를 계산하려면 어린이가 몇명인가를 알아야 합니다. 문제의 조건에 의하여 귤과 사과의 알수가 같다고 생각하면 매 어린이에게 나누어주는 귤과 사과의 차를 리용하여 어린이가 몇명이여야 귤이 42알 남는가를 계산할수 있습니다.

귤과 사과의 알수가 같다고 가정하고 귤의 알수를 기준으로 잡습니다. 사과의 알수는 실제 있는 알수의 3배로 됩니다. 사과는 다 나누어주어도 어린이인원수가 변하지 않으므로 매 어린이들에게 $3\times3=9$ 알의 사과를 나누어주는것으로 됩니다. 이렇게 하면 남은 42알의 귤과 매 어린이에게 나누어주는 귤과 사과의 차에 의하여 어린이수를 구할수 있습니다.

$42\div(3\times3-7)=42\div2=21$ (명)

$3\times21=63$ (알) (사과)

$7\times21+42=189$ (알) (귤)

답. 귤이 189알, 사과가 63알 있었습니다.

실례 11. 벌레 A, B, C가 있습니다. 벌레 A는 발이 8개이고 벌레 B는 6개의 발과 두 쌍의 날개가 있으며 벌레 C는 6개의 발과 한쌍의 날개가 있습니다. 이 세가지 벌레가 모두 18마리입니다. 그리고 발은 모두 118개이고 날개는 모두 20쌍입니다. 벌레가 각각 몇마리씩 있습니까?

따져보기와 풀기

이 문제는 앞에서 본 문제보다 좀 복잡합니다. 왜냐하

면 문제에 세가지 미지수(모르는 수)가 들어있기때문입니다. 그러나 잘 살펴보면 벌레 B, C의 발이 모두 6개이므로 발의 개수에 의하여 두가지로 가를수 있습니다. 발이 8개인 벌레 A와 발이 6개인 벌레 B, C로 가를수 있습니다.

18마리의 벌레가 모두 A라고 가정하면 발은 모두 18 ×8=144개입니다. 문제의 조건은 118개이므로 그 차는 144－118=26개입니다. 이렇게 차가 생기는 원인은 발이 6개인 벌레 B, C도 발이 8개인 벌레 A로 본데서 생긴것입니다. 매 한마리당 발개수의 차는 2개입니다. 벌레 A로 가정한 벌레 B, C는 모두 26÷2=13 (마리)입니다.

그러므로 벌레 A는 18－13=5 (마리)입니다.

발이 6개인 벌레가 모두 벌레 B라고 가정하면 26개의 날개가 있어야 하는데 이것은 실제 날개보다 26－20=6쌍의 날개가 더 많습니다. 한마리의 벌레 C를 한마리의 벌레 B로 보면 날개수는 한쌍씩 많아집니다. 그러므로 벌레 C의 마리수는 6÷1=6 (마리)이며 벌레 B는 13－6=7 (마리)입니다.

$$(8\times18-118)\div(8-6)=26\div2=13\ (\text{마리})$$

벌레 B와 C는 모두 13마리이고 벌레 A는 18－13=5 (마리)입니다. 벌레 C는 (2×13－20)÷(2－1)=6 (마리)입니다. 벌레 B는 13－6=7 (마리)입니다.

답. 벌레 A는 5마리, 벌레 B는 7마리, 벌레 C는 6마리입니다.

실례 12. 44명의 학생들이 학교도서실에서 빌린 책은 모두 340권입니다. 한사람이 4권과 6권씩 빌린 학생수는 꼭 같습니다. 나머지학생은 모두 한사람이 10권씩 빌렸습니다. 4권, 6권, 10권씩 빌린 학생은 각각 몇명씩입니까?

따져보기와 풀기

4권, 6권씩 빌린 학생수는 꼭 같으므로 이 학생들은 한사람이 평균 5권씩 빌렸다고 볼수 있습니다. 이렇게 보면 44명의 학생을 두 부류 즉 5권씩 빌린 학생과 10권씩 빌린

학생의 두가지로 가를수 있습니다.

한 학생이 모두 10권씩 빌렸다고 가정하면 모든 학생이 빌린 책은 모두 $10\times44=440$권이 되는데 이것은 실제 빌린 권수보다 $440-340=100$권이 더 많습니다. 이와 같은 차가 생긴 원인은 5권씩 빌린 학생도 모두 10권씩 빌린 학생으로 계산하였기때문입니다. 그러므로 5권씩 빌린 학생은 (즉 4권과 6권을 빌린 학생수의 합) $100\div5=20$명이여야 합니다.

이렇게 하여 10권씩 빌린 학생은 $44-20=24$ (명)입니다.

20명가운데서 한 학생이 모두 6권씩 빌렸다고 다시 가정하면 $6\times20=120$ (권)을 빌린것으로 되는데 이것은 실제 빌린 권수보다 $120-5\times20=20$권이 더 많습니다. 그러므로 4권씩 빌린 학생은 $20\div(6-4)=10$ (명)이여야 하고 6권씩 빌린 학생은 $20-10=10$ (명)입니다.

$(10\times44-340)\div[10-(6+4)\div2]$

$=100\div5=20$ (명) (4권과 6권씩 빌린 학생수의 합)

$44-20=24$ (명) (10권씩 빌린 학생수)

$(6\times20-5\times20)\div(6-4)=20\div2=10$ (명)

$20-10=10$ (명)

답. 4권씩 빌린 학생은 10명, 6권씩 빌린 학생은 10명, 10권씩 빌린 학생은 24명입니다.

실례 13. 큰 뻐스 한대를 수리하는데 A종류의 부속품이 8개, B종류의 부속품이 3개 필요하다면 작은 뻐스 한대를 수리하는데 A종류의 부속품이 4개, B종류의 부속품이 10개가 요구됩니다. A종류의 부속품을 52개, B종류의 부속품을 79개 썼다면 큰 뻐스와 작은 뻐스를 각각 몇대씩 수리하였겠습니까?

따져보기와 풀기

모든 부속품을 다 작은 뻐스를 수리하는데 썼다고

합시다. 그러면 A종류의 부속품으로 52÷4=13(대)의 작은 뻐스를 수리할수 있습니다. 이 13대의 작은 뻐스는 B종류의 부속품을 10×13=130개 유구합니다. 그런데 실제 있는 B종류의 부속품보다 130−79=51개 더 많습니다. 큰 뻐스 한대가 요구하는 A종류의 부속품은 작은 뻐스 한대가 요구하는 부속품의 2배이므로 한대의 큰 뻐스대신 작은 뻐스 두대를 생각할수 있습니다. 그런데 A종류의 부속품개수는 고정되여있으므로 B종류의 부속품을 10×2−3=17개 적게 써야 합니다. 51개에는 17개짜리가 3개 들어있고 3대의 큰 뻐스로 6대의 작은 뻐스를 대신할수 있으며 B종류의 부속품은 79개 쓰게 됩니다. 이렇게 하여 큰 뻐스와 작은 뻐스의 대수를 구할수 있습니다.

$$[10\times(52\div4)-79]\div(10\times2-3)$$
$$=(10\times13-79)\times17=51\div17=3\ (대)\quad (큰\ 뻐스)$$
$$(52-8\times3)\div4=28\div4=7\ (대)\quad (작은\ 뻐스)$$

답. 작은 뻐스 7대와 큰 뻐스 3대를 수리할수 있습니다.

련습 6

1. 선생님들과 학생 194명이 3대의 뻐스에 갈라 타고 야영을 갑니다. 두번째 뻐스에는 첫번째 뻐스보다 5명이 더 많이 탔고 세번째 뻐스에는 두번째 뻐스보다 11명이 적게 탔습니다. 3대의 뻐스에 각가 몇명씩 탔겠습니까?

2. 목재를 자동차로 운반하려 하는데 작은 자동차에 싣는다면 45대가 있어야 하고 큰 자동차로 운반한다면 36대가 필요합니다. 큰 자동차에는 작은 자동차보다 한대에 4t씩 더 실을수 있습니다. 운반해야 할 목재는 몇t입니까?

3. 리아저씨는 닭과 토끼를 모두 107마리 기릅니다. 토끼의 다리는 닭의 다리보다 56개 더 많습니다. 리아저씨가 기르는 토끼가 몇마리입니까?

4. 식당에 밀가루와 흰쌀이 있는데 밀가루는 흰쌀의 5배입니다. 흰쌀은 매일 30kg, 밀가루는 매일 75kg씩 소비한다면 며칠후에는 흰쌀은 다 소비되고 밀가루만 225kg이 남습니다. 이 식당에 흰쌀과 밀가루가 각각 몇kg 있었겠습니까?

5. 광진이가 산에 식물을 채집하려 갑니다. 오전 7시부터 산에 오르기 시작하였는데 1시간에 2km씩 갑니다. 산꼭대기에 오른 다음 한시간동안 거기서 휴식하고 내려옵니다. 내려올 때는 올라갈 때보다 1시간에 3km씩 더 걷습니다. 정각 12시에 산밑에 내려왔습니다. 전체 거리는 11km입니다. 산에 올라갈 때와 내려올 때 각각 몇 km씩 걸었습니까?

6. 상자안에 사과와 귤이 있는데 사과는 귤보다 3배 더 많습니다. 어린이들에게 나누어주려하는데 매 어린이에게 사과 5알과 귤 2알씩 나누어주면 귤은 나머지가 없고 사과는 11알이 남습니다. 상자안에 사과와 귤이 각각 몇알씩 있었겠습니까?

7. 광진이와 윤미가 달리기련습을 합니다. 광진이가 먼저 3분동안 달린 다음 또 윤미와 함께 5분간 달립니다. 두 사람은 함께 4050m를 달렸습니다. 윤미는 광진이보다 1분동안에 30m씩 더 달립니다. 광진이가 윤미보다 몇 m를 더 달렸겠습니까?

8. 10대의 큰 자동차와 20대의 작은 자동차가 함께 짐을 80t 운반합니다. 큰 자동차는 작은 자동차보다 3.5t을 더 운반합니다. 각각 몇t씩 운반하였겠습니까?

9. 어떤 그림책에 꼬리가 9개인 여우 (대가리가 하나이고 꼬리가 9개 있는 여우, 옛말에 나오는 1두9미여우)와 대가리가 9개인 새 (대가리가 9개이고 꼬리가 1개 있는 새; 옛말에 나오는 9두1미새)가 있는데 대가리는 모두 84개이고 꼬리는 116개 입니다. 여우와 새는 각각 몇마리입니까?

10. 어떤 일을 김아저씨가 혼자서 하면 20일간 걸리

고 최아저씨가 혼자서 하면 30일간 걸립니다. 두 사람이 함께 이 일을 끝내려 하는데 김아저씨는 사정이 있어서 며칠간 이 일에 참가하지 못하였습니다. 이 일을 두 사람이 함께 15일동안에 완성하였습니다. 김아저씨가 며칠동안 일에 참가하지 못하였습니까?

답

1. 첫번째 뻐스에 65명, 두번째 뻐스에 70명, 세번째 뻐스에 59명이 탔습니다. 2. 720t 3. 45마리 4. 흰쌀 90kg, 밀가루 450kg 있었습니다. 5. 내려갈 때 5000m, 올라갈 때 6000m 걸었습니다. 6. 사과가 66알, 귤이 22알 입니다. 7. 750m 8. 작은 자동차는 1.5t, 큰 자동차는 5t씩 운반합니다. 9. 여우가 12마리, 새가 8마리입니다. 10. 김아저씨는 5일간 작업에 참가하지 못하였습니다.

제7절. 대응법에 의한 응용문제풀기

응용문제를 풀 때에는 문제를 잘 살펴보고 문제에서 준 조건을 비교하며 대응하는 수량들사이의 변화관계를 따져보면서 답을 찾아야 합니다. 이와 같은 풀기방법을 대응법이라고 부릅니다. 응용문제를 풀 때 일반적인 풀기방법외에 이러한 특수한 풀기방법도 잘 리용할줄 알아야 합니다.

실례 1. 유치원교양원이 어린이들에게 사과를 나누어주려고 합니다. 이 사과를 한 어린이에게 4알씩 나누어주면 22알이 남고 6알씩 준다면 48알이 모자랍니다. 사과는 몇알이고 어린이는 몇명이겠습니까?

따져보기와 풀기

이 문제에는 두개의 대응하는 수량조건이 주어져있습니다. 따라서 한개의 조건만 가지고 생각할것이 아니라 대응관계에 있는 두 조건을 다 같이 생각하여야 합니다. 문제에서 준 조건을 그것들사이의 대응관계에 따라 다음과 같이 생각합니다.

한 어린이에게 4알씩 나누어줍니다. ↔22알의 사과가 남습니다.

한 어린이에게 6알씩 나누어줍니다. ↔48알의 사과가 모자랍니다.

한 어린이에게 나누어준 사과알수의 변화와 남은 사과알수사이의 변화관계를 살펴보면 다음과 같은 사실을 알수 있습니다. 한 어린이에게 나누어주는 사과알수가 4알로부터 6알로 변할 때 즉 한 어린이에게 사과를 2알씩 더 나누어주면 남는 사과의 알수는 22알이 더 많다(남는다)는데로부터 48알이 모자란다는데로 넘어갑니다. 이와 같은 수량의 변화과정에 사과알수의 차는 22+48=70 (알)로 변합니다. 이 대응관계의 변화에서 70에 몇개의 6－4=2가 들어있는가를 알면 어린이가 몇명인가를 계산할수 있습니다. 어린이가 몇명인가를 알면 곧 사과알수도 계산할수 있습니다.

어린이는 (22+48)÷(6－4)=70÷2=35 (명)입니다.

사과는 4×35+22=140+22=162 (알)

또는 6×35－48=210－48=162 (알)입니다.

답. 어린이수는 35명이고 사과는 162알입니다.

생각하기

만일 조건 《한 어린이에게 4알씩 나누어주면 22알의 사과가 남습니다.》가 변하지 않는다면 다른 한개 조건을 다음과 같이 고칩시다.

① 한 어린이에게 6알씩 나누어주면 2알이 남습니다. 이때 어린이가 몇명이겠습니까?

② 한 어린이에게 6알씩 나누어주면 사과가 남지도 모자라지도 않습니다. 어린이는 몇명이고 사과는 몇알이겠습니까?

실례 2. 윤미가 집에서 떠나서 학교까지 갑니다. 그가 1분동안에 80m씩 간다면 3분 지각하고 1분동안에 110m씩 간다면 3분 먼저 도착합니다. 학교에 7시 50분까지 도착하여야 한다며 몇시에 집에서 떠나야 정시에 학교에 도착할수 있습니까? 이때 1분동안에 88m의 속도로 갑니다.

따져보기와 풀기

이 문제와 실례1에서 푼 문제사이에 같은 점은 어떤것이고 다른 점은 어떤것인가를 생각해봅시다.

같은 점 : 대응하는 수량관계가 모두 2개입니다.

다른 점 : 수량들사이의 대응관계가 2개이지만 매 대응관계의 조건과 관계되는 단위는 다릅니다. 이것을 같은 단위로 넘겨야 합니다.

1분동안에 80m씩 갑니다. ↔3분 지각합니다.

1분동안에 110m씩 갑니다. ↔3분 앞당깁니다.

로부터

1분동안에 80m씩 갑니다. ↔240m (80×3)를 적게 갑니다.

1분동안에 110m씩 갑니다. ↔330m (110×3)를 더 갑니다.

로 넘깁니다.

이제 대응관계에 의하여 집과 학교사이의 거리를 구하고 1분동안에 80m의 속도로 이 거리를 가는데 걸리는 시간을 계산합니다.

1분동안에 80m의 속도로 갈 때 3분 지각하므로 이때 미처 가지 못한 거리는 80×3=240 (m)입니다.

1분동안에 110m의 속도로 걸어 3분 먼저 도착할 때 더 간 거리 즉 이 3분동안에 간 거리는 110×3=330 (m)입

니다.

그러므로

$$(240+330)\div(110-80)=570\div30=19\ (분)$$

입니다. 집부터 학교까지의 거리는

$$80\times(19+3)=1760\ (m)$$

또는 $$110\times(19-3)=1760\ (m)$$

입니다.

1분동안에 88m의 속도로 갈 때 걸리는 시간은

$$1760\div88=20(분)$$

$$50-20=30\ (분)$$

입니다.

답. 7시30분에 출발하면 정시에 학교에 도착합니다.

실례 3. 학교도서관에서 새책을 사왔습니다. 이 책을 한 학급에 8권씩 빌려주면 18권이 남고 한 학급에 7권씩 10개 학급에 빌려주고 그 나머지 학급에 10권씩 빌려준다면 남지도, 모자라지도 않습니다. 이 학교에 몇개의 학급이 있겠습니까? 도서관에서 새로 사온 책은 모두 몇권입니까?

따져보기와 풀기

조건 《한 학급에 7권씩 10개 학급에 빌려주고 나머지 학급에 10권씩 빌려준다면 남지도, 모자라지도 않습니다.》를 《한 학급에 10권씩 빌려준다면 $(10-7)\times10=30$권이 모자랍니다.》로 고쳐 생각합니다. 이와 같은 조건을 다음과 같이 표시합니다.

한 학급에 8권씩 빌려줍니다. ↔18권이 남습니다.

한 학급에 10권씩 빌려줍니다. ↔30권이 모자랍니다.

두 조건을 비교하면 한 학급에 빌려주는 책의 변화차 $10-8=2$권과 대응하는 책의 총수의 변화차 $18+30=48$권에 의하여 학급수를 계산할수 있습니다.

학급수는 $$(18+30)\div(10-8)=48\div2=24\ (개)$$

입니다.

새로 사온 책은 모두

$$8\times24+18=192+18=210\ (\text{권})$$

입니다.

답. 학교에는 24개 학급이 있고 도서관에서 새로 사온 책은 모두 210권 입니다.

실례 4. 윤미가 상점에서 사과와 귤을 사왔습니다. 귤은 사과의 3배입니다. 사과를 집식구 한 사람에게 2알씩 나누어주면 1알이 남습니다. 귤을 매 사람에게 8알씩 나누어주면 5알이 모자랍니다. 윤미의 집식구는 모두 몇명이며 사과와 귤을 몇알씩 사왔겠습니까?

따져보기와 풀기

조건을 대응시켜 쓰기는 힘듭니다.

한 사람에게 2알씩 나누어줍니다. ↔1알이 남습니다.

한 사람에게 8알씩 나누어줍니다. ↔5알이 모자랍니다.

다음 앞에서 지적한 대응법에 따라 계산합니다. 왜냐하면 문제에서 준 두 조건이 각각 귤과 사과이며 이 두가지 과일의 수량이 다르기때문입니다. 이것은 조건을 변화시킬것을 요구합니다.

가정법을 리용합시다. 사과와 귤이 같다고 가정합니다. 그리고 귤을 기준으로 잡습니다. 그러므로 사과알수는 본래 알수의 3배이여야 하며 집식구수는 변하지 않습니다. 나누어준 사과알수와 나머지 사과알수도 본래 알수의 3배이여야 합니다. 그러므로 이와 같이 가정한 조건밑에서 귤의 알수에 따라 분배해야 합니다.

조건을 다음과 같이 변화시킵니다.

한 사람에게 2×3알씩 나누어줍니다. ↔1×3알이 남습니다.

한 사람에게 8알씩 나누어줍니다.↔5알이 모자랍니다.

다시 앞에서 지적한 대응법을 씁니다.

집식구는 $(1\times3\times5)\div(8-2\times3)=8\div2=4$ (명)입니다.

귤은 $8\times4-5=27$(알) 사오고 사과는 $27\div3=9$ (알) 사왔습니다.

답. 집식구는 4명이고 윤미는 사과 9알, 귤 27알을 사왔습니다.

실례 5. 소년단원들이 나무심기작업을 합니다. 한명이 6대씩 심으면 나무가 12대 남고 한명이 4대씩 9명이 심고 나머지 소년단원들은 각각 한명이 8대씩 심는다면 2대가 모자랍니다. 나무는 몇대이며 나무심기에 참가한 소년단원은 몇명입니까?

따져보기와 풀기

문제에 있는 수량들사이의 변화를 보면 문제풀이의 기본열쇠는 조건 《한명이 4대씩 9명이 심고 나머지 소년단원들은 각각 8대씩 심는다면 2대가 모자랍니다.》를 다음과 같이 변화시켜 계산하는데 있습니다. 《만일 한명이 8대씩 심는다면 $9\times(8-4)+2$대가 모자랍니다.》로 변화시킵니다. 소년단원 한명이 심는 나무대수의 변화와 남아있는 나무대수의 변화에 의하여 소년단원수와 심어야 할 나무대수를 구할수 있습니다. 그러면 문제는 다음과 같이 변화됩니다.

한명이 6대씩 심습니다. ↔나무12대가 남습니다.

한명이 8대씩 심습니다. ↔나무 $9\times(8-4)+2$대가 모자랍니다.

소년단원은 모두

$$[9\times(8-4)+2+12]\div(8-6)=50\div2=25 \text{ (명)}$$

입니다.

심어야 할 나무는 $25\times6+12=162$ (대)입니다.

답. 나무심기에 참가한 소년단원은 25명이고 나무는

162대입니다.

실례 6. 학생들에게 학습장을 나누어주려고 합니다. 세명에게 각각 4권씩 나누어주고 나머지 학생들에게 각각 3권씩 나누어주면 9권이 남습니다. 만일 두명에게 각각 3권씩 나누어주고 나머지 학생들에게 각각 5권씩 나누어주면 2권이 남습니다. 학생은 몇명이며 학습장은 몇권이겠습니까?

풀기 대응하는 관계식

세명에게 각각 4권씩 나누어주고 나머지 학생들에게 3권씩 나누어줍니다. ↔9권이 남습니다.

두명에게 각각 3권씩 나누어주고 나머지 학생들에게 5권씩 나누어줍니다. ↔2권이 남습니다.

로부터

모든 학생들에게 3권씩 나누어줍니다. ↔9+3권이 남습니다.

모든 학생들에게 5권씩 나누어줍니다. ↔2권이 모자랍니다.

로 넘깁니다.

이때 학생은 모두

$$(9+3+2)\div(5-3)=14\div2=7\ (\text{명})\text{이고}$$

학습장은

$$4\times3+3\times(7-3)+9=12+12+9=33\ (\text{권})$$

입니다.

답. 학생은 7명이고 학습장은 33권입니다.

실례 7. 몇명의 학생들이 학교교재림에 사과나무와 배나무를 심습니다. 사과나무는 배나무의 2배입니다. 배나무를 한 학생이 3대씩 심는다면 2대가 남고 사과나무를 한 학생이 7대씩 심는다면 6대가 모자랍니다. 나무심기에 참가한 학생은 몇명이겠습니까? 사과나무와 배나무는 각각 몇그루씩 입니까?

따져보기와 풀기

문제에서 주어진 조건 《배나무를 한 학생이 3대씩 심으면 2대가 남고 사과나무를 한 학생이 7대씩 심으면 6대가 모자랍니다.》에 의하여 한 학생이 심는 나무대수의 변화와 나머지 나무대수의 변화를 리용하면 답을 쉽게 찾을수 있겠습니까? 라는 물음에 직접 찾을수 있다고 대답하지 못합니다. 왜냐하면 이 조건에서 지적하는것은 대상이 서로 다른 배나무와 사과나무이며 이 두가지 나무대수도 서로 다르기때문입니다. 그러므로 조건을 반드시 다음과 같이 변화시켜야 합니다. 즉 《사과나무대수가 배나무대수의 2배입니다.》라는 조건을 리용하여야 합니다. 배나무대수와 사과나무대수가 같다고 가정합니다. 즉 배나무대수를 본래 배나무대수의 2배로 가정하면 학생수에는 변화가 없으므로 한 학생이 심는 나무대수와 나머지 나무대수도 본래 나무대수의 2배로 되여야 합니다. 따라서 조건 《배나무를 한 학생이 3대씩 심으면 2대가 남습니다.》를 배나무를 《한 학생이 3×2대씩 심으면 2×2대가 남습니다.》로 고쳐야 합니다. 가정에 의하면 배나무와 사과나무대수가 같아야 합니다. 즉

한 학생이 3×2대씩 심습니다. ↔2×2대가 남습니다.

한 학생이 7대씩 심습니다. ↔ 6대가 모자랍니다.

에 의하여 학생수를 구할수 있고 따라서 사과나무와 배나무대수도 구할수 있습니다.

학생은 모두

$$(2\times2+6)\div(7-3\times2)=10\ (\text{명})$$

사과나무는

$$7\times10-6=64\ (\text{그루})$$

배나무는

$$64\div2=32\ (\text{그루})$$

또는 $3\times10+2=32$ (그루) 입니다.

답. 나무심기에 참가한 학생은 10명이고 사과나무는

64그루, 배나무는 32그루입니다.

실례 8. 인민군대아저씨들이 자동차를 타고 건설장으로 떠나려고 합니다. 본래 계획은 자동차 한대에 30명씩 태우면 3명이 남는데 이 3명은 계획밖의 자동차를 타게 되여있었습니다. 그런데 다른 긴급한 임무가 제기되여 자동차 한대를 다른데 돌려야 합니다. 이때 자동차 한대에 34명씩 태우면 5명이 남습니다. 이 5명은 다른 자동차를 리용하도록 하였습니다. 본래 계획한 자동차는 몇대입니까? 건설장에 동원된 인민군대아저씨는 모두 몇명입니까?

따져보기와 풀기

문제의 조건 《자동차 한대에 30명씩 타면 3명이 남습니다.》에 의하여 그것들사이의 대응관계를 다음과 같이 생각할수 있습니다. 즉

자동차 한대에 30명씩 탑니다. ↔3명이 남습니다. 와 같이 됩니다. 그런데 이것은 문제풀이의 기본열쇠로는 되지 못합니다. 기본은 그다음의 조건입니다. 즉 《다른 긴급한 임무가 제기되여 자동차 한대를 다른데 돌리고 자동차 한대에 34명씩 태우니 5명이 남았습니다.》라는 조건입니다. 그런데 이 조건에서는 자동차대수에서 앞의 조건과 다르기때문에 그대로는 대응시키지 못합니다. 그러므로 이 조건을 다음과 같이 고칩니다. 만일 본래의 자동차대수로 한 자동차에 34명씩 태운다면 34－5=29명이 더 탈수 있습니다. 즉 29명이 모자랍니다. 관계식을 세우면

자동차 한대에 34명씩 태웁니다. ↔34－5=29명이 모자랍니다.

이렇게 자동차 한대에 태울수 있는 인원수와 남는 인원수 또는 모자라는 인원수사이의 대응관계에 기초하여 자동차대수를 구할수 있습니다.

자동차는 $(3+34-5)\div(34-30)=32\div4=8$ (대)

인민군대아저씨들은 $30\times8+3=243$ (명)입니다.

답. 건설장에 동원된 인민군대아저씨들은 243명이고 본래 8대의 자동차를 계획하였습니다.

실례 9. 광진이는 긴 끈과 추를 리용하여 우물의 깊이를 재려고 합니다. 끈을 두겹으로 접었을 때 끈의 길이가 우물깊이보다 6m 더 길었습니다. 끈을 네겹으로 접었을 때 끈의 길이는 우물의 깊이보다 1m 더 길었습니다. 우물과 끈의 길이는 각각 몇m입니까?

따져보기와 풀기

문제의 조건에서 《끈의 길이가 우물깊이보다 6m 더 깁니다.》에 주의를 돌려야 합니다. 이 조건은 끈을 두겹으로 접었을 때이므로 끈길이는 우물깊이의 2배보다 $6\times2=12$m 더 깁니다. 끈을 네겹으로 접었을 때 끈의 길이가 우물보다 1m 더 길다는것은 끈의 길이가 우물깊이의 4배보다 $1\times4=4$m 더 길다는것을 보여줍니다. 즉

끈을 두겹으로 접었을 때 $6\times2=12$m 더 깁니다.

끈을 네겹으로 접었을 때 $1\times4=4$m 더 깁니다.

이렇게 배수의 변화와 길이의 나머지사이의 수량관계에 의하여 우물의 깊이와 끈의 길이를 구할수 있습니다.

우물의 깊이는

$$(6\times2-1\times4)\div(4-2)=8\div2=4\ (\text{m})$$

끈의 길이는

$$4\times2+6\times2=20\ (\text{m})$$

답. 우물의 깊이는 4m이고 끈의 길이는 20m입니다.

실례 10. 윤미는 학용품상점에 가서 처음에 잉크 3병과 원주필 4자루를 사는데 10원을 물었습니다. 두번째로 상점에 가서 8원을 물고 잉크 3병과 원주필 2자루를 사왔습니다. 잉크 한병과 원주필 한자루의 값은 각각 얼마입니까?

따져보기와 풀기

조건을 쓰면 다음과 같습니다.

잉크 3병, 원주필 4자루를 사는데 10원을 물었습

니다.

잉크 3병, 원주필 2자루를 사는데 8원을 물었습니다.

이 조건을 비교해보면 첫번째와 두번째로 산 잉크량은 같습니다. 두번째에 문 돈은 첫번째에 문 돈보다 적습니다. 이것은 두번째로 산 원주필이 첫번째로 산 원주필보다 4－2=2자루 적기때문입니다.

원주필 한자루의 값은

$$(10-8)\div(4-2)=1\ (원)$$

잉크 한병의 값은

$$(8-1\times2)\div3=2\ (원)$$

답. 원주필 한자루의 값은 1원, 잉크 한병의 값은 2원입니다.

실례 11. 체육선생님이 백화점에 가서 축구공 5개와 롱구공 4개를 사는데 640원을 물었고 축구공 2개와 롱구공 3개를 사는데 340원을 물었습니다. 축구공 한개와 롱구공 한개의 값은 각각 얼마입니까?

따져보기와 풀기

조건을 쓰면 다음과 같습니다.

축구공 5개, 롱구공 4개를 사는데 모두 640원을 물었습니다.

축구공 2개, 롱구공 3개를 사는데 모두 340원을 물었습니다.

축구공의 개수와 롱구공의 개수가 같다면 쉽게 풀리므로 기본수량관계가 변하지 않는다는 조건밑에서 축구공의 개수, 롱구공의 개수, 문 돈을 같은 크기로 확대하는 방법을 쓸수 있습니다. 첫번째 조건에서 매개 량을 2배로 확대하고 두번째 조건에서 매개 량을 5배로 확대하면 조건은 다음과 같이 됩니다.

5×2=10개의 축구공, 4×2=8개의 롱구공을 사는데 모두 640×2=1280원을 물었습니다.

$2\times5=10$개의 축구공, $3\times5=15$개의 롱구공을 사는데 모두 $340\times5=1700$원을 물었습니다.

롱구공 한개의 값은

$$(1700-1280)\div(15-8)=60\ (원)$$

축구공 한개의 값은

$$(340-60\times3)\div2=80\ (원)$$

답. 축구공 1개의 값은 80원, 롱구공 1개의 값은 60원입니다.

실례 12. A는 3kg의 사과와 2kg의 배를 샀고 B는 4kg의 사과와 3kg의 배를 샀으며 C는 3kg의 사과와 4kg의 배를 샀습니다. B는 A보다 5원을 더 물었고 A는 C보다 4원을 적게 물었습니다. A, B, C는 각각 얼마씩 물었겠습니까?

따져보기와 풀기

문제의 조건에 따라 다음과 같이 쓸수 있습니다.

A： 3kg의 사과, 2kg의 배
B： 4kg의 사과, 3kg의 배
C： 3kg의 사과, 4kg의 배

조건을 비교해보면 A, C가 산 사과량은 같습니다. 그러므로 기본은 A, C사이의 관계입니다.

A： 3kg의 사과, 2kg의 배
C： 3kg의 사과, 4kg의 배

A가 C보다 4원을 적게 문것은 A는 C보다 $4-2=2$kg의 배를 적게 샀기때문입니다. 그러므로 배 1kg의 값은 $4\div2=2$ (원)입니다.

사과 1kg의 값을 구하기 위하여 다시 A와 B사이의 관계를 리용합니다.

A： 3kg의 사과, 2kg의 배
B： 4kg의 사과, 3kg의 배

A, B가 산 배의 량을 같게 하기 위하여 B가 2kg의 배를 샀다고 가정합니다. 이때 B는 2원을 적게 물어야 합

니다. 그러므로 《B는 A보다 5원을 더 물었습니다.》는 조건을 《B는 A보다 5−2=3원을 더 물었습니다.》로 고쳐야 합니다. 그러므로 사과 1kg의 값은

$$3 \div (4-3) = 3\ (원)$$

입니다.

A는 $3\times3+2\times2=13$원을 물었고
B는 $3\times4+2\times3=18$원을 물었으며
C는 $3\times3+2\times4=17$원을 물었습니다.

답. A는 13원, B는 18원, C는 17원을 물었습니다.

실례 13. 붉은색, 노란색, 흰색의 세가지 꽃송이가 있습니다. 붉은색꽃과 노란색꽃을 합치면 모두 15송이이고 노란색꽃과 흰색꽃을 합치면 모두 18송이이며 흰색꽃과 붉은색꽃을 합치면 모두 9송이입니다. 이 세가지 꽃은 각각 몇송이씩 있습니까?

따져보기와 풀기

주어진 조건을 쓰면 다음과 같습니다.

붉은색꽃+노란색꽃=15송이　①
노란색꽃+흰색꽃=18송이　②
붉은색꽃+흰색꽃=9송이　③

비교해보면 세가지 꽃송이는

$$(15+18+9) \div 2 = 21\ (송이) \qquad ④$$

라는것을 알수 있습니다.

④, ②로부터 붉은색꽃은 21−18 = 3송이라는것을 알수 있습니다.

④, ③으로부터 노란색꽃은 21−9=12송이라는것을 알수 있습니다.

④, ①로부터 흰색꽃은 21−15 = 6송이라는것을 알수 있습니다.

답. 붉은색꽃은 3송이, 노란색꽃은 12송이, 흰색꽃은 6송이입니다.

실례 14. 식당에서 첫번째로 실어온 흰쌀 3포대와 밀가루 8포대의 총량은 500kg이며 두번째로 실어온 흰쌀 4포대와 밀가루 5포대의 총량은 525kg입니다. 흰쌀 한포대와 밀가루 한포대의 질량은 각각 몇 kg이겠습니까?

따져보기와 풀기

식량과 그 량들사이의 대응관계를 보면 다음과 같습니다.

흰쌀 3포대, 밀가루 8포대의 질량은 500kg

흰쌀 4포대, 밀가루 5포대의 질량은 525 kg

기본방법은 흰쌀과 밀가루의 질량을 같은 배수로 확대하여 포대수와 질량이 같게 되도록 하는것입니다.

첫번째 조건에 있는 흰쌀포대수, 밀가루포대수, 총량을 모두 4배로 확대하고 두번째 조건에 있는 흰쌀포대수, 밀가루포대수, 총량을 모두 3배로 확대합니다.

흰쌀 3×4포대, 밀가루 8×4포대의 질량은 500×4 kg입니다.

흰쌀 4×3포대, 밀가루 5×3포대의 질량은 525×3 kg입니다.

즉 흰쌀 12포대, 밀가루 32포대의 질량은 2000 kg

흰쌀 12포대, 밀가루 15포대의 질량은 1575 kg

이렇게 하면 흰쌀포대수가 같아졌으므로 쉽게 풀수 있습니다.

밀가루 한포대의 질량은

$$(500\times4-525\times3)\div(8\times4-5\times3)$$
$$=(2000-1575)\div(32-15)=25\ (\mathrm{kg})$$

흰쌀 한포대의 질량은

$$(500-25\times8)\div3=(500-200)\div3=100\ (\mathrm{kg})$$

답. 흰쌀 한포대의 질량은 100 kg이고 밀가루 한포대의 질량은 25 kg입니다.

실례 15. 리선생님은 188원을 물고 옷 한벌과 모자 한개, 구두 한컬레를 샀습니다. 리선생님은 옷 한벌의 값

은 모자 한개의 값보다 117원이 더 많고 옷 한벌과 모자 한개값의 합은 구두 한컬레의 값보다 138원이 더 많다는 것만 알고있습니다. 리선생님을 도와서 매 물건의 값을 계산해보십시오.

따져보기와 풀기

문제에서 제시된 수량관계를 쓰면 다음과 같습니다.

옷 한벌값 + 모자 한개값 + 구두 한컬레의 값
= 188원 ①

옷 한벌값－모자 한개값 = 117원 ②

옷 한벌값 + 모자 한개값－구두 한컬레의 값
= 138원 ③

우의 수량관계의 대응을 살펴봅시다. 즉 이와 같은 관계에서 어느 수량에 변화가 있고 어느 수량에 변화가 없는가를 살펴봅니다. ①식과 ③식을 비교하여 《옷 한벌값+모자 한개의 값》에는 변화가 없다는것을 알수 있고 ①식에서는 여기에 구두 한컬레값을 더했으며 ③식에서는 구두 한컬레값을 덜어냈습니다. ①식과 ③식에서 산 물건값의 차는 (188－138=)50원입니다. 구두 한컬레값의 2배는 50원입니다. 이로부터 구두 한컬레값이 25원이라는것이 얻어집니다. 이때 ①식은

옷 한벌값 + 모자 한개의 값 = 163 (원)

으로 변화됩니다. 이 식을 다시 ②식과 대비하면 2배의 모자 한개값은 (163－117) = 46원이라는것이 얻어집니다. 모자 한개의 값을 구하면 옷 한벌값을 알수 있습니다.

옷 한벌값 + 모자 한개의 값 + 구두 한컬레의 값
= 188 (원)

옷 한벌값－모자 한개의 값 = 117 (원)

옷 한벌값 + 모자 한개의 값－구두 한컬레의 값
= 138 (원)

구두 한컬레값은 $(188-138)\div 2=25$ (원)

모자 한개의 값은 $(188-25-117)\div 2=23$ (원)

옷 한벌값은 $188-25-23=140$ (원)

답. 리선생님이 산 옷 한벌의 값은 140원, 모자 한개의 값은 23원, 구두 한컬레의 값은 25원입니다.

련습 7

1. 집단체조에 참가할 학생들의 대렬을 편성합니다. 만일 한줄에 9명씩 세우면 37명이 남고 한줄에 12명씩 세우면 20명이 모자랍니다. 학생들을 몇줄로 세워야 하며 학생은 몇명입니까?

2. 사과를 어린이들에게 나누어주려고 합니다. 한 어린이에게 5알씩 주면 32알이 남고 10명의 어린이에게 4알씩 나누어주고 나머지 어린이들에게 8알씩 나누어주면 사과는 남지도 않고 모자라지도 않습니다. 어린이는 몇명이며 사과는 몇알입니까?

3. 학생들에게 사과를 공급하려고 합니다. 만일 8명에게 8kg씩 나누어주고 그 나머지 학생들에게 6kg씩 나누어주면 96kg의 사과가 남습니다. 만일 10명에게 6 kg씩 나누어주고 나머지 학생들에게 10kg씩 나누어주면 남지도 않고 모자라지도 않습니다. 학생들은 모두 몇명이며 사과는 몇kg입니까?

4. 신입생들을 기숙사에 배치합니다. 매 방에 3명씩 배치하면 23명이 남고 한 방에 5명씩 배치하면 3개 방이 남습니다. 기숙사방은 몇개이며 신입생은 몇명입니까?

5. 리선생님은 학기말시험을 앞두고 수학복습문제를 제시하였는데 그가운데서 계산문제는 응용문제의 2배입니다. 윤미는 매일 응용문제 3문제와 계산문제 4문제씩 풀려고 계획하였습니다. 리선생님이 규정한 기간에 다 풀려고 계산해보니 응용문제풀이는 끝낼수 있으나 계산문제는

아직도 16문제가 남아있었습니다. 리선생님은 며칠사이에 수학복습문제풀이를 끝내라고 지시하였겠습니까? 계산문제와 응용문제는 각각 몇문제씩입니까?

6. 5개의 큰 구와 3개의 작은 구의 질량합은 42g이고 5개의 작은 구와 3개의 큰 구의 질량합은 38g입니다. 큰 구와 작은 구는 각각 몇g입니까?

7. 흰색, 붉은색, 검은색의 세가지 구가 있습니다. 흰색구와 붉은색구를 합치면 15개가 되고 붉은색구와 검은색구를 합치면 18개가 되며 검은색구와 흰색구를 합치면 9개가 됩니다. 이 세가지 구는 각각 몇개씩입니까?

8. $5m^3$의 소나무와 $4m^3$의 백양나무값을 합치면 1770원이고 $3m^3$의 소나무와 $6m^3$의 백양나무를 합친 값은 1710원입니다. 이 두가지 나무의 $1m^3$의 값은 각각 얼마씩 입니까?

9. 윤미와 윤선이는 각각 꼭 같은 수학문제집을 사왔습니다. 그들은 똑같은 기간에 문제집에 있는 문제를 다 풀기로 약속하였습니다. 윤미는 첫 두주동안은 매주 25문제씩 풀고 그 다음주부터는 매주 20문제씩 풀면 약속한 기간에 끝낼수 있습니다. 윤선이는 첫 두주동안은 매주 30문제씩 풀고 그 다음주부터는 25문제씩 풀면 두주 앞당겨 끝낼수 있습니다. 이 문제집에 있는 문제는 몇문제이며 그들은 몇주동안에 끝내려고 계획하였겠습니까?

10. 설날을 앞두고 어머니는 세가지 과일을 사왔습니다. 배와 사과를 합치면 30알이고 사과와 귤을 합치면 50알이며 배와 귤을 합치면 40알입니다. 어머니가 사온 사과, 배, 귤은 각각 몇알씩 입니까?

답

1. $(37+20)\div(12-9)=19$ (줄)
   $9\times19+37=208$ (명)
2. $[(8-4)\times10+32]\div(8-5)=24$ (명)

$5\times24+32=152$ (알)

3. $[96+(8-6)\times8+(10-6)\times10]\div(10-6)=38$ (명)
   $6\times10+10\times(38-10)=340$ (kg)
4. $(23+5\times3)\div(5-3)=19$ (방)
   $3\times19+23=80$ (명)
5. $16\div(3\times2-4)=8$ (일)
   $3\times8=24$ (문제)　　응용문제
   $4\times8+16=48$ (문제)　계산문제
6. $(42+38)\div(5+3)=10$ (g)
   큰 구는 $(42-10\times3)\div(5-3)=6$ (g)
   작은 구는 $10-6=4$ (g)
7. $(15+18+9)\div2=21$ (개)
   검은색구는 $21-15=6$ (개)
   흰색구는 $21-18=3$ (개)
   붉은색구는 $21-9=12$ (개)
8. 백양나무는 $(1710\times5-1770\times3)\div(6\times5-4\times3)=180$ (원)
   소나무는 $(1770-180\times4)\div5=210$ (원)
9. $[25\times2-(30-25)\times2+(25-20)\times2]\div(25-20)=10$ (주)
   $25\times2\times20\times(10-2)=210$ (문제)
10. $(30+50+40)\div2=60$ (알)
   귤은 $60-30=30$ (알)
   배는 $60-50=10$ (알)
   사과는 $60-40=20$ (알)

제8절. 론리추리문제

학생들은 탐정소설읽기를 좋아합니다. 소설에 나오는 정탐가들이 복잡한 사건을 재치있게 처리해나가는 그 밑바탕에는 무엇이 있겠습니까? 그것은 자기의 총명과 재능을 발휘할수 있도록 머리를 잘 쓰는데 있습니다. 그들은

사건의 인적증거(사람의 증거)와 물질적근거에 의거한 론리적추리와 판단에 의하여 사건을 풀어나갑니다.

일상생활과 문예작품에서뿐아니라 수학에서도 이와 비슷한 문제가 있습니다. 이와 같은 문제는 수학의 개념, 법칙, 공식 등의 계산에도 의거하지만 중요하게는 어떤 조건, 결론 및 그것들사이의 론리적관계에 의거하여 판단하고 추리하여 정확한 결론을 얻어냅니다. 이러한 문제를 론리추리문제라고 부릅니다. 론리추리문제의 풀이는 론리적인 사고능력을 키워주는데 도움이 됩니다.

이제 간단한 론리추리문제와 론리추리의 기본방법, 기본기교를 공부합시다.

실례 1. 세 사람 A, B, C가 윤미네 책장에 있는 책에 대하여 다음과 같이 평가하였습니다.

A：거기에는 적어도 1000권의 책이 있을것입니다.

B：그의 책은 1000권이 안될것입니다.

C：가장 적어서 1권의 책이 있습니다.

이 세가지 평가중에서 하나만이 정확합니다. 이 책장에 있는 책은 몇권이겠습니까?

따져보기와 풀기

이 세가지 평가중에서 하나만이 정확하므로 이것을 기본열쇠로 하여 가정을 설정하고 추리하여 결론을 얻어야 합니다.

① A의 말이 옳다고 가정하면 B, C의 말은 틀린것으로 됩니다. A의 말이 옳다는데로부터 책장에는 적어도 1000권의 책이 있다는 결론이 나옵니다. B의 말이 거짓말이라는데로부터 책장에는 책이 1000권이 넘을것이라는 결론이 나옵니다.

C의 말이 거짓말이므로 책장에는 한권의 책도 없다는 결론이 나옵니다.

이 두가지 결론은 서로 모순됩니다. 그러므로 가정은 틀립니다.

② B의 말이 옳다고 가정하면 A, C의 말은 거짓말입니다. B의 말이 옳다는데로부터 책장의 책은 1000권이 못된다는것이 나옵니다. A의 말이 거짓말이라는데로부터 책장의 책이 1000권이 못된다는것이 나옵니다. C의 말이 거짓말이라는데로부터 책장에 책이 한권도 없다는 결론이 나옵니다.

이 세가지 결론사이에는 서로 모순되는것이 없습니다. 그러므로 가정이 성립합니다.

③ C의 말이 옳다고 가정하면 A, B 두 사람의 말은 거짓말입니다. A의 말이 거짓말이라는데로부터 책장에는 책이 1000권이 안된다는 결론이 나옵니다. B의 말이 거짓말이라는데로부터 책장의 책이 1000권을 넘는다는것이 나옵니다.

이 두가지 결론은 서로 모순됩니다. 그러므로 가정은 틀립니다.

이로부터 ②의 가정이 성립한다는것을 알수 있습니다.

답. 윤미네 책장에는 1권의 책도 없습니다.

[설명] 두 사람 A, B의 말은 서로 모순된다는것을 알수 있습니다. 즉 두 사람의 말이 동시에 성립할수 없으며 그중 하나는 진실이고 다른 하나는 거짓입니다. 세가지 말중에서 하나만이 진실이므로 C의 말이 거짓이라고 하면 윤미네 책장에는 1권의 책도 없다는 결론이 얻어집니다.

실례 2. 책상우에 A, K, Q, J중 어느 한개 글자가 써있는 8장의 주패가 뒤집어놓여있습니다(그림 8－1). 다음과 같은 사실을 알고있습니다.

(1) 매장은 모두 A, K, Q, J중의 어느 한 장입니다.

(2) 이 8장중에서 적어도 한장은 Q입니다.

(3) 그중 어느 한장만은 A입니다.

(4) 모든 Q는 모두 두장의 K사

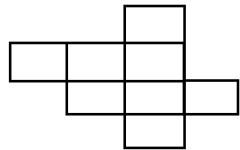



그림 8－1

이에 있습니다.

(5) 적어도 한장의 K는 두장의 J사이에 있습니다.

(6) J와 Q는 서로 린접이 아니며 A와 K도 서로 린접이 아닙니다.

(7) 적어도 두장의 K는 린접입니다.

8장의 주패는 각각 어떤 주패입니까?

따져보기와 풀기

그림 8−2와 같이 8장의 주패위치에 번호를 달아줍니다.

조건 (2), (4)에 의하여 Q의 위치는 다음과 같은 네가지 경우가 있을수 있습니다.

① 3과 6이 동시에 Q인 경우
② 3이 Q인 경우
③ 6이 Q인 경우
④ 4가 Q인 경우

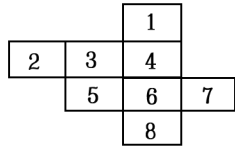



그림 8−2

입니다. 이제 이 네가지 경우에 대하여 다음과 같이 가정합니다.

① 3과 6이 동시에 Q라고 가정하면 2, 4, 5, 7 또는 2, 4, 8이 K가 됩니다. 그런데 이 두가지 경우는 모두 조건 (5)에 모순됩니다.

② 3이 Q라고 가정하면 2, 4가 K로 됩니다. 조건 (6)에 의하여 A는 5,7,8의 위치에만 있을수 있고 6은 K로 될수 없습니다. 또 조건 (7)에 의하여 1은 반드시 K여야 합니다. 이때 역시 조건 (5)에 모순됩니다.

③ 6이 Q라고 가정하면 4, 8 또는 5, 7은 K입니다. 만일 4, 8이 K이면 조건 (5)에 모순됩니다. 만일 5, 7이 K이면 조건 (7)에 의하여 3은 반드시 K여야 한다는것을 알수 있습니다. 따라서 2, 4는 J여야 합니다. 이것은 또 조건 (6)에 모순됩니다.

④ 4가 Q일 때만 1, 6이 K이고 5, 7이 J, 8이 K가 됩니다. 2와 3의 두 자리가 남아있습니다. 조건에 의하면 3이 A이고 2가 J라는것을 알수 있습니다.

실례 3. 한 방에 살고있는 A, B, C, D의 네명의 녀학생들이 노래를 감상하고있습니다. 그들중의 한명은 옷을 손질하고 한명은 머리단장을 하고 한명은 구두를 닦으며 나머지 한명은 책을 읽고있습니다. 다음과 같은 사실을 알고있습니다.

① A는 옷을 손질하지 않으며 책도 읽지 않습니다.
② B는 구두를 닦지 않으며 옷을 손질하지 않습니다.
③ 만일 A가 구두를 닦지 않는다면 C는 옷을 손질하지 않습니다.
④ D는 책을 읽지 않으며 옷도 손질하지 않습니다.

이 녀학생들은 무엇을 하고있겠습니까?

따져보기와 풀기

네 사람이 각각 무엇을 하고있는가를 판단하여야 하므로 4×4인 표를 리용할수 있습니다. 이 표에서 옳다는것을 《0》로, 틀린다는것을 《×》로 표시합니다. 매 행, 매 렬에서 옳은것이 하나뿐입니다.

조건 ①에 의하여 A는 옷을 손질하지 않고 책도 읽지 않습니다. 해당한 칸에 《×》를 쓰면 표 8-1이 얻어집니다.

표 8-1

	옷손질	머리단장	구두닦기	책읽기
A	×			×
B				
C				
D				

표 8-2

	옷손질	머리단장	구두닦기	책읽기
A	×			×
B	×		×	
C				
D				

조건 ②에 의하여 B는 구두를 닦지 않으며 옷도 손질하지 않습니다. 이때 표 8-2가 얻어집니다.

조건 ④에 의하여 D는 책을 읽지 않으며 옷도 손질하지 않습니다. 표 8-3이 얻어집니다.

답. A는 구두를 닦고 B는 책을 읽으며 C는 옷을 손질하고 D는 머리단장을 합니다(표 8-4).

표 8-3

	옷손질	머리단장	구두닦기	책읽기
A	×			×
B	×		×	
C				
D	×			×

표 8-4

	옷손질	머리단장	구두닦기	책읽기
A	×	×	0	×
B	×	×	×	0
C	0	×	×	×
D	×	0	×	×

실례 4. A, B, C의 세 선생님이 수학, 물리, 화학, 생물, 국어, 력사를 가르칩니다. 이 선생님들은 두 과목씩 배워줍니다. 다음과 같은 사실을 알고있습니다.

① 화학선생님과 수학선생님은 함께 삽니다.

② A선생님은 세 선생님들가운데서 가장 나이가 어립니다.

③ 수학선생님과 C선생님은 한 조의 우수한 장기선수입니다.

④ 물리선생님은 생물선생님보다 나이가 많고 B선생님보다 젊었습니다.

⑤ 세 선생님들가운데서 가장 나이가 많은 선생님의 집은 나머지 두 선생님들보다 더 멀리 있습니다.

세 선생님들은 각각 어느 두 과목을 가르치겠습니까?

따져보기와 풀기

3×6인 표를 그립니다.

조건 ③에 의하여 C선생님은 수학을 배워주지 않습니다.

조건 ④에 의하여 생물선생님의 나이가 가장 어리고 B선생님은 나이가 가장 많으며 B선생님은 물리와 생물을 배워주지 않으며 생물선생님은 물리를 배워주지 않습니다.

조건 ②에 의하여 A선생님은 생물을 배워줍니다. 그러므로 A선생님은 물리를 배워주지 않습니다. 표 8-5가 얻어집니다.

표 8-5로부터 C선생님이 물리를 배워준다는것이 알려집니다. 표 8-6이 얻어집니다.

표 8-5

	수학	물리	화학	생물	국어	력사
A		×		0		
B		×		×		
C	×					

표 8-6

	수학	물리	화학	생물	국어	력사
A		×	0			
B		×	×			
C	×	0				

B선생님이 나이가 가장 많으므로 조건 ①, ⑤로부터 B선생님이 화학과 수학을 배워주지 않는다는것을 알수 있습니다. 표 8-7이 얻어집니다.

표 8-7로부터 B선생님이 국어와 력사를 배워주고 A선생님은 수학을 배워준다는것을 알수 있습니다. 따라서 표 8-8이 얻어집니다.

표 8-7

	수학	물리	화학	생물	국어	력사
A		×		0		
B	×	×	×	×		
C	×	0				

표 8-8

	수학	물리	화학	생물	국어	력사
A	0	×	×	0	×	×
B	×	×	×	×	0	0
C	×	0	0	×	×	×

답. A선생님은 수학과 생물을 배워주고 B선생님은 국어와 력사를 배워주며 C선생님은 물리와 화학을 배워줍니다.

[**설명**] 실례들에서 리용한 방법을 배제법이라고 부릅니다. 배제법을 써서 추리할 때 조건이 명백해야 하며 먼저 조건과 모순되는 항목을 배제함으로써 문제가 간단해지게 하여야 합니다. 만일 여러가지 대상과 맞다들었을 때 배제하기 어려우면 비교하고 따져보아야 합니다. 필요할 때는 가정법을 함께 쓸수도 있습니다.

실례 5. A, B, C, D의 네 사람이 영어, 프랑스어, 중국어, 일본어중의 두가지 외국어를 알고있고 그중 세 사람은 영어로 말할수 있습니다. 그러나 네 사람이 다 아는 한가지 외국어는 없습니다. 그리고 일본어와 프랑스어를 다 아는 사람은 없습니다. A는 일본어를 아나 B는 일본어를 모릅니

다. 그러나 그들은 다른 한가지 외국어로 말할수 있습니다. C는 중국어를 모르며 A와 D가 말할 때 C는 그들을 위하여 통역해야 합니다. B, C, D는 같은 외국어를 모릅니다. 네 사람이 각각 어떤 두가지 외국어를 알고있겠습니까?

따져보기와 풀기

4×4인 표를 만듭니다.

주어진 조건으로부터 A는 일본어를 알고 프랑스어를 모릅니다. A가 아는 두번째 외국어는 영어 또는 중국어일수 있습니다. 만일 중국어를 안다면 《세 사람이 영어를 압니다.》로부터 B, C, D는 모두 영어를 안다는것이 알려지는데 이것은 《B, C, D가 같은 외국어를 모릅니다.》에 모순됩니다. 그러므로 A가 알고있는 두번째 외국어는 영어입니다. 표 8−9가 얻어집니다.

표 8−9

	영어	프랑스어	중국어	일본어
A	0	×	×	0
B				
C				
D				

A와 D가 말할 때 C가 통역해야 하므로 A와 D는 같은 외국어를 알지 못합니다. 즉 D는 영어와 일본어를 모르며 프랑스어와 중국어를 압니다. B와 C는 모두 영어를 압니다. C는 각각 A, B와 함께 같은 외국어를 알고있으며 C는 중국어를 알지 못하므로 C와 D는 프랑스어를 압니다. 표 8−10이 얻어집니다.

표 8−10

	영어	프랑스어	중국어	일본어
A	0	×	×	0
B	0			
C	0	0	×	×
D	×	0	0	×

B는 일본어를 모르며 《B, C, D는 같은 외국어를 모릅니다.》에 의하여 B가 알고있는 두번째 외국어는 중국어입니다.

답. A는 영어와 일본어, B는 영어와 중국어, C는 영어와 프랑스어, D는 프랑스어와 중국어를 압니다.

실례 5. A, B, C, D, E의 다섯사람이 각각 도서관에서 소설을 한권씩 빌려왔습니다. 그들은 다 읽은 다음 서로 바꾸어 읽기로 약속하고 몇차례에 걸쳐 바꾸어 읽었습니다. 이리하여 한 사람이 모두 이 5권의 소설을 다 읽었습니다. 다음과 같은 사실을 알고있습니다.

① A가 마지막으로 읽은 책은 B가 읽은 두번째 책입니다.

② C가 마지막에 읽은 책은 B가 읽은 네번째 책입니다.

③ C가 읽은 두번째 책은 A가 처음에 읽은 책입니다.

④ D가 마지막에 읽은 책은 C가 읽은 세번째 책입니다.

⑤ B가 읽은 네번째 책은 E가 읽은 세번째 책입니다.

⑥ D가 읽은 세번째 책은 C가 처음에 읽은 책입니다.

이와 같은 사실에 의하여 매 사람이 읽은 책의 순서를 판단하십시오.

따져보기와 풀기

이 문제의 조건은 비교적 복잡합니다. 도표를 만들어푸는것이 좋습니다. 다섯사람이 각각 이 5권의 책을 읽은 순서를 판단해야 하므로 5×5인 표를 만듭니다. 가로줄에 매 사람이 읽은 이 5권의 책순서를 표시하고 세로줄에 매번 책을 바꾼 다음 매 사람이 읽은 책을 표시합니다. 문제의 조건으로부터 매 가로줄과 매 세로줄에는 이 5권의 책중에서 한권이 반드시 한번씩 나타나야 합니다. 주어진 조건으로부터 마지막에 읽은 책을 알아낼수 있습니다.

A, B, C, D, E가 마지막으로 읽은 책의 이름을 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ로 표시하면 주어진 조건에 의하여 표 8−11을 만들수 있습니다. 표 8−11에 있는 두 x는 아직 결정되지 않은 같은 책의 이름을 표시하며 꼭같이 두 y도 아직 결정되지 않은 다른 같은 책의 이름을 표시합니다.

ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ는 가로줄과 세로줄에 한번씩은 나타나야 하므로 표 8－11에서 B_3(아래첨수 3은 어떤 사람이 세번째로 읽은 책이름을 표시합니다.)은 ㄱ, ㄴ,ㄷ, ㄹ도 아니므로 B_3=ㅁ입니다. 따라서 B_1=ㄹ입니다. 이로부터 표 8－12가 얻어집니다.

표 8－11

	1	2	3	4	5
A	x				ㄱ
B		ㄱ		ㄷ	ㄴ
C	y	x	ㄹ		ㄷ
D			Y		ㄹ
E			ㄷ		ㅁ

표 8－12로부터 A_3은 ㄱ, ㅁ, ㄹ, ㄷ가 아니라는것을 알수 있고 따라서 A_3= L입니다. 이로부터 y =ㄱ라는것을 알수 있습니다. 표 8－13이 얻어집니다.

표 8－12

	1	2	3	4	5
A	x				ㄱ
B	ㄹ	ㄱ	ㅁ	ㄷ	ㄴ
C	y	x	ㄹ		ㄷ
D			y		ㄹ
E			ㄷ		ㅁ

표 8－13으로부터 x는 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㄷ가 아니라는것을 알수 있고 따라서 x=ㅁ입니다. 계속 추리하고 판단하면 매 사람이 읽은 순서가 얻어집니다.

답. 표 8－14와 같습니다.

표 8－13

	1	2	3	4	5
A	x		ㄴ		ㄱ
B	ㄹ	ㄱ	ㅁ	ㄷ	ㄴ
C	ㄱ	x	ㄹ		ㄷ
D			y		ㄹ
E			ㄷ		ㅁ

표 8－14

	1	2	3	4	5
A	ㅁ	ㄷ	ㄴ	ㄹ	ㄱ
B	ㄹ	ㄱ	ㅁ	ㄷ	ㄴ
C	ㄱ	ㅁ	ㄹ	ㄴ	ㄷ
D	ㄷ	ㄴ	ㄱ	ㅁ	ㄹ
E	ㄴ	ㄹ	ㄷ	ㄱ	ㅁ

련습 8

1. 어느날 선생님이 5명의 학생들에게 5명의 과학자의 사진을 보여주면서 이름을 불러보라고 하였습니다. 선생님은 사진에 1부터 5까지의 번호를 달았습니다. 학생들은 그가운데서 임의의 두 과학자의 이름을 불렀습니다.

A： 《2번은 뉴톤이고 3번은 갈릴레이입니다.》

B： 《1번은 와트이고 2번은 아인슈타인입니다.》

C： 《3번은 아인슈타인이고 5번은 와트입니다.》

D： 《2번은 뉴톤이고 4번은 꼬쉬입니다.》

E： 《4번은 꼬쉬이고 1번은 갈릴레이입니다.》

학생들의 대답을 들은 선생님은 매 학생들이 말한것의 절반이 맞는다는것을 알았습니다. 이 과학자들의 사진은 각각 몇번이겠습니까?

2. 세명의 로동자가 있는데 한명은 전공이고 다른 한명은 선반공이며 또 다른 한명은 용접공입니다. 다음의 세가지 결론중에서 한가지만이 맞습니다. 그들은 각각 무슨 일을 하겠습니까?

① A는 선반공입니다.

② B는 선반공이 아닙니다.

③ C는 용접공이 아닙니다.

3. 수학경연에서 A, B, C, D, E, F, G, H의 8명이 1등부터 8등까지사이의 등수에 들었습니다. 선생님은 누가 1등인가를 물었습니다.

A： 《F가 1등이거나 또는 H가 1등입니다.》

B： 《내가 1등입니다.》

C： 《G가 1등입니다.》

D： 《B는 1등이 아닙니다.》

E： 《A가 말한것이 틀립니다.》

F： 《나는 1등이 아니고 H도 1등이 아닙니다.》

G： 《C는 1등이 아닙니다.》

H： 《나는 A의 의견과 같습니다.》

선생님은 8명중에서 세 사람의 말이 맞는다는것을 알았습니다. 누가 1등을 하였겠습니까?

4. 표 8－15에서 2, 3, 4번 자리는 앞줄이고 1, 6, 5번자리는 뒤줄입니다. 배구팀이 경기를 시작할 때 1, 4번자리에 서있는 선수는 주공격수이고 2, 5번자리에 서있는 선수는 제2방어수이며 3번자리에 있는 선수는 부공격수입니다. 경기가 시작될 때 우와 같은 위치에 서있는 선수들의 운동복의 번호는 1, 2, 3, 4, 5, 6번입니다. 그런데 매 선수가 서있는 자리번호는 그들의 운동복번호와 일치하지 않습니다. 다음과 같은 사실을 알고있습니다.

① 1번과 6번은 뒤줄에 서지 않습니다.

② 2번과 3번은 제2방어수가 아닙니다.

③ 3번과 4번은 같은 줄에 서지 않습니다.

④ 5번과 6번은 부공격수가 아닙니다.

매 선수들이 서있는 자리를 알아내십시오.

표 8－15

4	3	2
5	6	1

답

1. 1번은 뉴톤, 2번은 아인슈타인, 3번은 갈릴레이, 4번은 꼬쉬, 5번은 와트입니다.
2. A는 용접공, B는 선반공, C는 전공입니다.
3. C가 1등입니다.
4. 1번선수는 3번자리, 2번선수는 6번자리, 3번선수는 4번자리, 4번선수는 5번자리, 5번선수는 1번자리, 6번선수는 2번자리에 있습니다.

제9절. 간단한 수렬문제와 그 응용

유명한 수학자 가우스(1777－1855)는 어릴 때부터 두각을 나타내기 시작하였습니다. 소학교에 들어가기전에 있은 일입니다. 하루는 선생님이 학생들에게

$$1+2+3+\cdots+99+100=?$$

을 계산하라고 하였습니다.

선생님이 문제를 제시하자 학생들은 열심히 계산하기 시작하였습니다. 가우스는 재빨리 답이 5050이라고 학습장에 써놓았습니다. 100개의 수를 하나씩 더해가던 학생들은 깜짝 놀랐습니다. 가우스가 어떻게 빨리 계산하였는지 모두 생각해봅시다.

어린 가우스는 1~100까지의 수에 다음과 같은 규칙이 성립한다는것을 알아냈습니다.

$$1+100=2+99=3+98=\cdots=49+52=50+51$$

여기서 매 쌍의 수들의 합은 모두 101입니다. 즉 처음과 마지막 두 수의 합과 같다는것을 알았습니다. 이와 같이 합이 101인 수의 쌍은 $100\div2=50$쌍이라는것을 알수 있습니다. 그러므로 이 수들의 합은 $101\times50=5050$입니다.

식으로 세우면 다음과 같습니다.

$$1+2+3+\cdots+99+100=(1+100)\times100\div2=5,050$$

우와 같은 수렬의 합을 구할 때 이 방법을 그대로 리용할수 있겠는가 하는 문제를 생각해봅시다.

실례 1. 다음 수렬의 ( )에 알맞는 수를 써넣으십시오.

1, 2, 5, 10, 17, ( ), ( ), 50

따져보기와 풀기

이 수렬에 어떤 규칙이 있는가를 찾아봅시다.

첫번째 항： 1

두번째 항： 2＝1+1＝ 첫번째 항 ＋1

세번째 항： 5＝2+3＝ 두번째 항 ＋3

네번째 항： 10＝5+5＝ 세번째 항 ＋5
…

이 수렬의 두번째 항부터 시작하여 매개 항은 모두 그앞에 있는 항에 차례로 각각 1, 3, 5, 7, 9, …를 더하면 얻어집니다. 이렇게 하여 다섯번째 항으로부터 괄호안의 수를 구할수 있습니다.

답. 첫번째 괄호안에 (17+9=)26을 써넣어야 하고 두번째 괄호안에는 (26+11=)37을 써넣어야 합니다.

실례 2. 1부터 시작하여 두 옹근수를 뛰여넘어 차례로 옹근수를 쓰면 수렬

1, 4, 7, 10, …

이 얻어집니다. 100번째 수는 얼마이겠습니까?

따져보기와 풀기

이 문제는 우와 같은 방법으로 풀기 어렵습니다. 그러므로 다른 방향에서 문제를 살펴보아야 합니다.

① 이 수렬에서 이웃한 두 항의 차는 얼마입니까?

서로 이웃한 매 항의 차는 3입니다. 《3》을 이 수렬의 같은차라고 부릅니다. 그리고 이와 같은 수렬을 같은차수렬이라고 부릅니다.

② 이 같은차수렬의 매 항과 첫번째 항, 같은차사이에는 어떤 관계가 있겠습니까?

두번째 항： 4＝1+3
세번째 항： 7＝4+3＝1+2×3
네번째 항： 10＝7+3＝1+3×3
…

이로부터 같은차수렬의 임의의 항은

첫번째 항+(항수－1)×같은차

와 같습니다. 이 공식을 같은차수렬의 일반항공식이라고 부릅니다.

이 수렬에서 첫 항은 1이고 같은차는 3이므로 이 수렬의 100번째 항은

$$1+(100-1)\times3=1+99\times3=298$$

입니다.

실례 3. 다음과 같은 두 수렬의 규칙을 찾고 그 차이를 찾아보십시오.

① 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21

② 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

따져보기 수렬 ①에서 $3+21=5+19=7+17=\cdots=11+13$이므로 가우스의 방법을 써서 합을 구할수 있습니다. 즉

$$3+5+7+\cdots+21=(3+21)\times10\div2=120$$

입니다.

수렬 ②에서 $1+100\neq4+81$이므로 가우스의 방법으로 합을 구할수 없습니다. 이 수렬은 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2$으로 고쳐 쓸수 있습니다. 즉 1부터 10까지의 매 자연수의 두제곱으로 된 수렬입니다.

같은차수렬의 첫항을 a_1, 두번째 항을 a_2, $\cdots$, n번째 항을 a_n으로 표시하면 같은차수렬을 다음과 같이 표시할수 있습니다.

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$$

a_1와 a_n을 각각 같은차수렬의 첫번째 항과 n번째 항이라고 부릅니다. 같은차수렬에서 두번째 항 a_2로부터 시작하여 그 뒤의 항에서 그 앞의 항을 던 차는 모두 같습니다. 이 같은 차를 d로 표시합니다. 즉

$$d=a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_{n-1}-a_{n-2}=a_n-a_{n-1}$$

실례를 들어 같은차수렬 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21에서 같은차 $d=2$이고 항수 $n=10$이며 첫 항 $a_1=3$, 마지막 항 $a_{10}=21$입니다.

같은차수렬의 일반항공식

$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2\times d$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3\times d$$

같은차수렬은 두번째 항부터 시작하여 매 항은 모두

첫번째 항에 같은차의 몇배를 더한것과 같으며 이 배수는 그 항의 항수에서 1을 덜어낸 차와 같습니다. 그러므로

$$a_n = a_1+(n-1)d$$

가 성립합니다. 이 공식을 같은차수렬의 일반항공식이라고 부릅니다. 이 공식을 리용하여 같은차수렬의 임의의 항을 구할수 있습니다.

실례 4. 같은차수렬 3, 5, 7, …의 10번째 항과 100번째 항을 구하십시오.

풀기 이 같은차수렬에서 $a_1 = 3, d = 2, n = 10,100$입니다.

공식에 갈아넣으면 다음과 같이 됩니다.

$$a_{10} = a_1+(10-1)\times d = 3+9\times 2 = 21$$

$$a_{100} = a_1+(100-1)\times d = 3+99\times 2 = 201$$

이 실례에서 볼수 있는바와 같이 첫 항이 a_1이고 같은차가 d이며 구하려는 항 a_n의 항수가 n일 때 일반항공식을 써서 a_n을 구할수 있습니다.

실례 5. 같은차수렬 3, 6, 9, 12, 15, …이 주어졌습니다. 45는 이 수렬의 몇번째 항입니까?

따져보기 45가 이 수렬의 몇번째 항인가를 직접 셀수 있으나 몹시 복잡합니다. 그러나 이 문제에서 $a_1=3, d=3, a_n=45$라는것이 주어졌으므로 주어진 조건값을 직접 일반항공식에 대입하면 n이 얻어집니다.

풀기 1: $a_1=3, d=3, a_n=45$를 일반항공식에 직접 갈아넣으면 $45=3+(n-1)\times 3$이 얻어집니다. 이로부터 $n=15$가 구해집니다.

그러므로 45는 이 수렬의 15번째 항입니다.

풀기 2: 일반항공식으로부터 항수 n을 구할수 있습니다.

일반항공식 $a_n=a_1+(n-1)\times d$로부터

$$(a_n-a_1)\div d = n-1$$

$$(a_n-a_1)\div d+1 = n$$

즉 $n = (a_n-a_1)\div d+1$이 얻어집니다.

이제 주어진 조건 $a_1=3$, $d=3$, $a_n=45$를 우의 공식에 갈아넣으면

$$n=(45-3)\div 3+1$$
$$n=42\div 3+1$$
$$n=15$$

답. 45는 이 수렬의 15번째 항입니다.

같은차수렬의 합을 구하는 공식

같은차수렬 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$의 일반항공식으로부터

$$a_1+a_n=a_1+a_1+(n-1)\times d=2a_1+(n-1)\times d$$
$$a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+[a_1+(n-2)\times d]=2a_1+(n-1)\times d$$
$$a_3+a_{n-2}=(a_1+2d)+[a_1+(n-3)\times d]=2a_1+(n-1)\times d$$
$$\cdots$$

가 얻어집니다.

따라서 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$입니다. 같은차수렬의 합은 모두 이 수렬의 첫 항과 마지막 항의 합에 수렬의 항수를 곱한 적을 2로 나눈 상과 같습니다. 즉

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=(a_1+a_n)\times n\div 2$$

입니다. 이것이 같은차수렬의 합을 구하는 공식입니다. 구체적으로 같은차수렬이 주어지면 첫 항 a_1, 마지막 항 a_n 및 항수 n만 알면 합을 구하는 공식을 리용하여 이 같은차수렬의 합을 구할수 있습니다.

실례 6. 1+2+3+⋯+1991 을 구하십시오.

풀기 수렬 1, 2, 3, ⋯, 1991은 같은차수렬이고 $a_1=1$, $a_n=1991$, $n=1991$이므로 같은차수렬의 합을 구하는 공식에 갈아넣으면

$1+2+3+\cdots+1991=(1+1991)\times 1991\div 2=1983036$이 얻어집니다.

답. $1+2+\cdots+1991=1983036$

[설명] 수렬의 합을 구하기전에 문제에서 준 수렬이 어떤 수렬인가를 알아야 합니다. 만일 그것이 같은차수렬이면 같은차수렬의 합의 공식을 써야 하고 만일 그것이 같은차수렬이 아니면 이 공식을 쓸수 없다는데 주의하여

야 합니다.

실례 7. $1+4+7+\cdots+298$을 계산하십시오.

따져보기와 풀기;

1, 4, 7, …, 298은 같은차수렬이므로 이 수렬의 모든 항들의 합을 구하려면 이 수렬이 몇개 항으로 되여있는가를 구한 다음 합을 구하는 공식에 갈아넣어 계산합니다.

1, 4, 7,…, 298은 같은차수렬이고 $a_1=1$, $d=3$, $a_n=298$이므로 같은차수렬의 항수 구하는 공식에 의하여 이 수렬의 항수 n을 구해야 합니다.

$$n=(298-1)\div3+1=297\div3+1=100$$

이므로 이 수렬의 항수는 100입니다. 같은차수렬의 합의 공식에 의하여

$$1+4+7+\cdots+298=(1+298)\times100\div2=14,950$$

이 됩니다.

[설명] 이 실례에서 알수 있는바와 같이 같은차수렬에서 첫 항 a_1, 같은차 d, 마지막 항 a_n이 주어지면 먼저 항수 n을 구한 다음 공식을 리용하여 합을 구하여야 합니다.

실례 8. 100개의 수 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}, a_{100}$이 주어졌습니다. 첫번째 항은 $a_1=7$이고 두번째 항은 a_2로부터 시작하여 그 앞에 있는 수보다 2가 더 많습니다. 이 100개의 수들의 합을 구하십시오.

따져보기와 풀기

뒤에 있는 항이 앞에 있는 항보다 2가 더 많으므로 이 수렬은 같은차수렬입니다. 만일 합을 구하는 공식을 리용하여 합을 구하려면 먼저 같은차수렬의 마지막 항을 알아야 합니다.

이 100개의 수로 같은차수렬을 만들면 $a_1=7$, d=2, $n=100$이므로 일반항을 구하는 공식에 의하여

$$a_{100}=7+(100-1)\times2=7+99\times2=205$$

가 얻어집니다. $a_1=7$, $a_n=205$, $n=100$을 합을 구하는 공식에 갈아넣으면

$$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=(7+205)\times 100\div 2=10600$$
이 얻어집니다.

[설명] 이상의 실례들을 푸는 과정을 통하여 알수 있는바와 같이 같은차수렬의 첫 항이 a_1, 항수가 n, 같은차가 d일 때 그 합을 구하려면 먼저 마지막항 a_n을 구한 다음 항을 구하는 공식을 리용하여야 합니다. 만일 어떤 같은차수렬의 첫 항 a_1, 마지막 항 a_n, 항수 n, 같은차 d중에서 3개만 알면 일반항 구하는 공식에 의하여 다른 하나를 구할수 있고 합을 구하는 공식을 리용하여 이 같은차수렬의 합을 구할수 있습니다.

실례 9. A=1+3+⋯+1989+1991, B=2+4+⋯+1988+1990이면 두 수 A와 B중에서 큰 수는 작은 수보다 얼마나 더 큽니까?

따져보기 주어진 두 수 A, B는 모두 같은차수렬의 합이므로 먼저 같은차수렬의 합을 구한 다음 A, B의 크기를 비교하고 그 차를 구하여야 합니다.

풀기 1: 같은차수렬 1, 3, 5, 7, ⋯, 1989, 1991에서 $a_1=1$, $d=2$, $a_n=1991$이므로 이 같은차수렬의 항수는
$$n=(1991-1)\div 2+1=996$$
입니다. 수렬의 합을 구하는 공식에 의하여
$$A=1+3+5+7+\cdots+1989+1991=(1+1991)\times 996\div 2=992016$$
이 됩니다.

같은차수렬 2, 4, 6, 8, ⋯, 1988, 1990에서 $a_1=2$, $d=2$, $a_n=1990$이므로 이 같은차수렬의 항수는
$$n=(1990-2)\div 2+1=995$$
입니다.

공식에 의하여
$$\begin{aligned}B&=2+4+6+8+\cdots+1988+1990\\&=(2+1990)\times 995\div 2=991020\end{aligned}$$
이 됩니다.

물론 A > B이고
$$A-B=992016-991020=996$$

입니다. 그러므로 A, B 두 수중에서 큰 수는 작은 수보다 996이 더 큽니다.

풀기 2: A−B=

$$=(1+3+5+\cdots+1989+1991)-(2+4+6+\cdots+1988+1990)$$
$$=1+(3-2)+(5-4)+\cdots+(1989-1988)+(1991-1990)$$
$$=1+\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{995\text{개}}=996$$

[설명] 주어진 같은차수렬 1, 3, 5, ⋯, 1989, 1991은 996개 항이고 같은차수렬 2, 4, 6, ⋯, 1988, 1990은 995개 항입니다. 그러므로 같은차수렬 1, 3, 5, ⋯, 1989,1991에서 1을 제외한 매 항에서 같은차수렬 2, 4, 6, ⋯, 1988, 1990을 덜면 답이 얻어집니다.

실례 10. 수 7로 나눈 나머지가 1이 되는 모든 세자리수의 합을 구하십시오.

따져보기와 풀기

먼저 수 7로 나눈 나머지가 1인 세자리수가 어떤 수인가를 따져보아야 합니다.

수 7로 완제되는 세자리수중에서 105가 가장 작으므로 수 7로 나누었을 때 나머지가 1이 되는 최소수는 106입니다. 꼭 같은 방법으로 이와 같은 세자리수중에서 최대수는 995라는것을 알수 있고 이 세자리수의 앞과 뒤에 있는 두 수는 모두 차가 7입니다. 그러므로 같은차수렬을 만들고 이 수렬의 합을 구하는 공식을 쓸수 있습니다.

구하려는 세자리수는

106, 113, 120, ⋯, 995

입니다. 이것은 같은차수렬로서 $a_1=106, d=7, a_n=995$입니다. 같은차수렬의 항수를 구하는 공식에 의하여 n을 구하면

$$n=(995-106)\div 7+1=889\div 7+1=128$$

이 됩니다. 다시 $a_1=106,\ a_\mathrm{n}=995,\ n=128$을 합을 구하는

공식에 갈아넣으면

$$106+113+120+\cdots+995=(106+995)\times 128\div 2=70,464$$

이 됩니다. 그러므로 수 7로 나누었을 때 나머지가 1이 되는 세자리수의 합은 70464입니다.

실례 10. 1부터 100사이에 있는 5 또는 9으로 완제되지 않는 수의 합은 얼마입니까?

따져보기와 풀기

먼저 5 또는 9으로 완제되는 수를 찾고 그것들의 합을 구한 다음 다시 $1+2+3+\cdots+99+100$의 합에서 그 합을 덜어야 합니다.

수 1부터 100까지에서 5로 완제되는 수는 5, 10, 15, …, 100이고 이 같은차수렬의 항수는 $n=(100-5)\div 5+1=20$입니다. 그러므로

$$5+10+15+\cdots+95+100=(5+100)\times 20\div 2$$
$$=105\times 20\div 2=1050$$

입니다.

또한 수 1부터 100까지에서 9로 완제되는 수는 9, 18, …, 90, 99이고 이 같은차수렬의 항수는 $n=(99-9)\div 9+1=11$입니다.

그러므로

$$9+18+27+\cdots+90+99=(9+99)\times 11\div 2$$
$$=108\times 11\div 2=594$$

입니다.

그런데 수 1부터 100까지의 수사이에서 45와 90은 5로도 완제되고 9로도 완제됩니다. 우에서 두 수렬의 합을 구할 때 45, 90이 되풀이되여 계산되였습니다.

따라서 1부터 100까지의 사이에 있는 5 또는 9로도 완제되지 않는 수의 합은

$$(1+2+3+\cdots+100)-(5+10+15+\cdots+100)-(9+18+27+\cdots+99)+45+90$$
$$=5050-1050-594+135=3541$$

입니다.

답. 3541입니다.

련습 9

1. 수렬 3, 6, 9, 12, 15, …, 387에 모두 몇개의 수가 있겠습니까? 50번째 수는 어떤 수입니까?
2. 다음의 괄호안에 알맞는 수를 써넣으십시오.
   ① 2, 4, 16, 256, ( )
   ② 14, 22, 38, 70, 134, ( )
   ③ 2, 4, 7, 11, 16, ( )
   ④ 3, 5, 9, 17, 33, 65, ( )
3. 같은차수렬 5, 8, 11, …의 21번째 항과 35번째 항을 구하십시오.
4. 같은차수렬 7, 11, 15, …, 184는 몇개의 항으로 되여있습니까?
5. 6+11+16+…+501을 계산하십시오.
6. 자연수중에서 모두 세자리수의 합을 구하십시오.
7. 같은차수렬 1, 5, 9, 13, 17, …의 100개 항의 합을 구하십시오.
8. 1부터 시작하여 련이어 있는 100개 홀수의 합을 구하십시오.
9. 2부터 시작하여 련이어 있는 100개 짝수의 합을 구하십시오.

답

1. 129개의 수가 있습니다. 50번째 수는 150입니다.
2. ① $(256)^2$ ② 128 ③ 22 ④ 129
3. $a_{21}=65$, $a_{35}=107$ 4. n = 48 5. 25350 6. 494550
7. 19900 8. 10000 9. 10100

제10절. 같은차수렬의 응용

이 절에서는 수렬의 배렬규칙찾기문제와 몇가지 응용 및 같은차수렬의 원리를 써서 풀수 있는 응용문제 몇가지를 학습합니다.

실례 1. 다음 산수식은 어떤 규칙에 따라 배렬된것입니다.

1+1, 2+3, 3+5, 4+7, 1+9, 2+11, 3+13, 4+15, 1+17,…

① 1998번째 산수식은 어떻게 되겠습니까?

② 몇번째 산수식의 합이 2000이 되겠습니까?

따져보기와 풀기

① 먼저 이 산수식의 더해지는 수와 더하는수의 배렬규칙을 찾은 다음 계산하여야 합니다.

더해지는수는 차례로 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, …이고 이 4개수가 한번 순환합니다.

1998÷4 = 499 …2이므로 1998번째 산수식의 더해지는 수는 2입니다.

이 산수식의 더하는수는 차례로 1, 3, 5, 7, 9, … 즉 첫항이 1이고 같은차가 2인 같은차수렬입니다. 같은차수렬의 일반항공식에 의하여 1998번째 산수식의 더하는수는

$$1+(1998-1)\times 2= 1+3994= 3995$$

이므로 1998번째 산수식은 2+3995입니다.

② 먼저 이 산수식에서 구하려는 합의 배렬규칙을 살펴보면 그것들은 《짝수》, 《홀수》의 순서로 반복되면서 순환한다는것을 알수 있습니다. 합 2000은 짝수이므로 이 산수식에서 구하려는 합의 배렬규칙에 의하여 1+x=2000 또는 3+x=2000뿐이라는것을 알수 있습니다. 여기서 x는 수렬 1, 3, 5, 7, 9,…의 어떤 수입니다. 이제 x가 어떤 값인가를 봅시다.

— 만일 1+x = 2000이면 x = 1999입니다. 같은차수렬의

일반항공식에 의하여 $(1999-1)\div2+1 = 1000$이 됩니다. 이것은 1999가 수렬 1, 3, 5, 7, 9,…중의 1000번째 수라는것을 말합니다. 또한 $1000\div4 = 250$인데 이것은 1000번째 산수식의 더해지는수가 4라는것을 말합니다. 이것은 $1+x=2000$이라는데 모순됩니다. 그러므로 $x\neq1999$입니다.

— 만일 $3+x = 2000$이면 $x = 1997$이 됩니다. 같은차수렬의 일반항공식에 의하여

$$(1997-1)\div2+1=999$$

가 됩니다. 이것은 1997이 같은차수렬 1, 3, 5, 7, 9, …의 999번째 항이라는것을 보여줍니다.

또한 $999\div4 = 249$ …3이 됩니다. 그러므로 999번째 산수식은 $3+1997=2000$입니다.

따라서 999번째 산수식의 합은 2000입니다.

실례 2. 1부터 200까지의 자연수를 다음과 같이 A, B, C의 세 조로 가릅시다.

A조： 1, 6, 7, 12, 13, 18, …
B조： 2, 5, 8, 11, 14, 17, …
C조： 3, 4, 9, 10, 15, 16, …

이 조에 들어있는 수들의 배렬규칙에 의하여 다음의 물음에 대답하십시오.

① B조에는 모두 몇개의 자연수가 있습니까?

② A조에 있는 24번째 수는 얼마입니까?

③ 178은 어느 조의 몇번째 수입니까?

따져보기와 풀기

① B조의 수의 배렬규칙이 어떠하며 B조의 마지막 한 수가 얼마인가를 알아야 합니다.

B조의 수는 같은차수렬을 만들며 첫 항은 2이고 같은차는 3입니다. 또한 세로방향의 수는 세개씩 한 조입니다. $200\div3=66$ …2이므로 200은 B조의 마지막 한개 수입니다.

같은차수렬의 항수를 구하는 공식에 의하여 200이 B

조에서

$$(200-2)\div3+1=66+1=67$$

번째 항입니다. 그러므로 B조에는 모두 67개의 수가 있습니다.

② A조의 배렬규칙이 어떠한가를 알아야 합니다. 24는 짝수이므로 짝수들의 배렬규칙에 특별한 주목을 돌려야 합니다.

A조의 배렬규칙이 다음과 같다는것을 알수 있습니다. 짝수번째 자리에 있는 수는 모두 6의 배수이고 배수는 《항수의 절반》이 됩니다. 그러므로 A조의 24번째 수는

$$6\times(24\div2)=6\times12=72$$

입니다.

③ 178이 어느 조에 속하는 수인가를 알려면 A, B, C의 매 조에 있는 수의 특성이 무엇이며 차이점은 어떤것인가를 알아야 합니다.

A조의 수들을 6으로 나누면 나머지가 1 또는 0이고 B조의 수를 3으로 나누면 나머지가 2이며 C조의 수를 3으로 나누면 나머지가 0 또는 1이라는것을 알수 있습니다.

C조에 있는 매 수의 규칙을 봅시다. 3으로 완제되였을 때 얻어지는 상이 항수로 되며 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수의 상에 1을 더한것이 항수로 됩니다.

$178\div3=59\ \cdots1$이고 C조의 규칙을 만족시키므로 178은 C조의 수이며 60번째 항입니다.

실례 3. 만일 1991이 11개의 잇닿아있는 홀수의 합이면 그중 최대홀수는 몇입니까?

따져보기 1 : 11개의 잇닿아있는 홀수는 같은차수렬을 만들므로 최대홀수는 이 같은차수렬의 마지막항 a_{11}입니다. 이 같은차수렬의 합이 1991이고 $n=11$, $d=2$이므로 일반항을 구하는 공식과 합을 구하는 공식을 써서 a_{11}를 구할수 있습니다.

풀기 1 : 이 같은차수렬의 합이 1991이고 n=11이 주

어졌으므로 합을 구하는 공식에 의하여

$$1991 = (a_1 + a_{11}) \times 11 \div 2$$

이 얻어집니다. $(a_1 + a_{11}) = 1{,}991 \times 2 \div 11$이므로 $a_1 + a_{11} = 362$입니다.

$d = 2$를 일반항 구하는 공식에 갈아넣으면

$$a_{11} = a_1 + (11 - 1) \times 2$$

이 얻어지며 정돈하면

$$a_{11} - a_1 = 20$$

이 됩니다. 이 식과 $a_1 + a_{11} = 362$를 변끼리 더하면

$$a_1 + a_{11} + a_{11} - a_1 = 362 + 20$$

$$2a_{11} = 382$$

$$a_{11} = 191$$

이 얻어집니다.

답. 11개의 잇닿아있는 홀수중에서 최대홀수는 191입니다.

따져보기 2: 이 문제의 다른 풀이법을 생각하기 위하여 간단한 5개의 잇닿아있는 홀수합이

$$3+5+7+9+11 = 35$$

인 경우를 봅시다. 이 합은 가운데항 7에 항수를 곱하면 얻어지고 반대로 35를 5로 나누면 가운데항 7이 얻어집니다.

주어진 문제에서 11개의 잇닿아있는 홀수의 합이 1991이므로 이 수렬의 가운데항을 구할수 있습니다. 그러므로 일반항 구하는 공식을 써서 마지막 항을 구할수 있습니다.

풀기 2: 11개의 잇닿아있는 홀수의 가운데항은

$$1991 \div 11 = 181$$

입니다.

이 수렬은 모두 11개의 항으로 되여있으므로 가운데항 181의 뒤에는 또한

$$(11-1)\div 2=5\text{개}$$
의 항이 더 있습니다. 만일 181을 같은차수렬의 첫 항으로 생각하면 최대홀수는 6번째 항입니다. 그리고 같은 차는 2이므로 일반항 구하는 공식에 의하여

$$a_6=181+(6-1)\times 2=181+5\times 2=191$$
이 됩니다. 즉 최대홀수는 191입니다.

실례 4. 10명의 동무들이 서로 만나 매 사람이 다른 동무들과 한번씩 인사를 나눈다면 모두 몇번 인사를 하겠습니까?

따져보기와 풀기

10명의 동무들을 각각 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{10}$이라고 하고 A_1부터 시작하여 차례로 따져봅니다.

A_1와 $A_2, A_3, \cdots, A_{10}$이 한번씩 인사를 나눈다고 하면 모두 9번의 인사를 나눕니다.

A_2은 A_1와 한번 인사를 나누었으므로 A_2은 $A_3, A_4, \cdots, A_{10}$의 8명과 한번씩 인사를 나눌수 있으므로 모두 8번 인사를 나눌수 있습니다.

A_3은 A_1, A_2과 한번씩 인사를 나누었으므로 A_3은 $A_4, A_5, \cdots, A_{10}$의 7명과 한번씩 인사를 나눌수 있습니다. 모두 7번의 인사를 나눌수 있습니다.

이런 식으로 따져나가면 A_9은 A_{10}과 한번만 인사를 나눌수 있습니다.

식으로 쓰면

$1+2+3+4+5+6+7+8+9=(1+9)\times 9\div 2=10\times 9\div 2=45$번
의 인사를 나눌수 있습니다.

답. 모두 45번의 인사를 나눌수 있습니다.

[설명] 이 실례에서 보는바와 같이 인사를 나누는 회수는 1부터 시작되는 잇닿아있는 자연수의 합입니다. 그가운데서 최대더하는수는 인사를 나누는 사람수보다 1만큼 적습니다. 만일 몇명의 사람들이 매 사람들과 한번씩 인사를 나눈다면 그들은 모두 $1+2+3+\cdots+(n-1)$번의 인사

를 나누게 됩니다.

이 실례에서 리용한 방법은 아주 중요한 방법으로서 수학문제를 풀 때 자주 쓰게 됩니다.

실례 5. 몇명의 과학자들이 과학기술토론회에 참가하였는데 토론회가 끝나고 그들은 서로 한번씩 인사를 나누었습니다. 인사를 나눈 총 회수는 28번입니다. 토론회에 참가한 사람은 몇명이겠습니까?

풀기 토론회에 참가한 과학자수가 n명이라고 하면 인사를 나눈 총 회수는

$$1+2+3+\cdots+(n-1)$$

로 표시되고 문제의 조건에 의하여

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=28$$

이 됩니다. 계산해보면

$$1+2+3+4+5+6+7=28$$

이 됩니다. 이로부터 $n-1=7$이 얻어집니다. 따라서 $n=8$입니다.

답. 토론회에 참가한 과학자들은 8명입니다.

실례 6. $0.1+0.4+0.7+0.1+0.13+0.16+0.19+\cdots+1.00$을 계산하십시오.

따져보기와 풀기

더하는수를 하나씩 더해가는 방법으로 계산하자면 매우 복잡합니다. 이 산수식은 더하는수들의 차가 같지 않으므로 같은차수렬이 아닙니다. 그러나 몇개 항을 갈라보면 앞의 3개 항은 같은차수렬이고 그 뒤의 항들끼리 같은차수렬을 이룹니다.

같은차수렬 0.1, 0.4, 0.7의 합은 쉽게 구할수 있습니다.

같은차수렬 0.10, 0.13, 0.16, ⋯, 1.00에서 $a_1=0.10$, $d=0.03$, $a_n=1$이므로 이 같은차수렬의 항수 n은

$$n=(1-0.10)\div 0.03+1=31$$

이 됩니다. 그러므로 합 구하는 공식을 리용하여 합을 구할수 있습니다.

$$0.1+0.4+0.7+0.10+0.13+0.16+0.19+\cdots+1.00$$
$$=(0.1+0.4+0.7)+(0.10+0.13+0.16+0.19+\cdots+1.00)$$
$$=1.2+(0.10+1.00)\times 31\div 2=1.2+17.05=18.25$$

실례 7. 그림 10－1은 5각형점방진입니다. 중심에 있는 한개 점은 1층이고 2층의 매 변은 2개 점으로 (바른5각형의 정점에 있는 한 점은 서로 이웃한 두 변에 공통입니다.); 3층의 매 변은 3개 점으로, 4층의 매 변은 4개 점으로 되여있습니다. 나머지 층들의 매 변의 점의 개수도 이 규칙에 따릅니다. 이러한 100층의 점방진에 모두 몇개의 점이 있겠습니까?

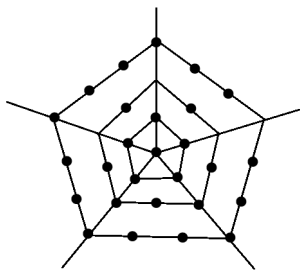



그림 10－1

따져보기와 풀기

그림 10－1에서 볼수 있는바와 같이 이 바른5각형점방진의 매 층에 있는 점의 개수는 다음과 같습니다.

1, 5, 10, 15, 20, …

모두 100개 층이므로 우의 수렬에서 1을 내놓은 나머지 99개 수는 같은차수렬을 이룹니다. 그러므로 합의 공식을 리용하여 구할수 있습니다.

이 5각형점방진에서 1층의 한개 점을 제외한 나머지 99개 층의 매 층의 점의 개수는

5, 10, 15, 20, …

로서 같은차수렬을 이룹니다. 여기서 $a_1=5$, $d=5$, $n=99$입니다. 일반항 구하는 공식을 리용하여 마지막항 a_{99}를 구할수 있습니다.

$$a_{99}=a_1+(99-1)\times d=5+98\times 5=495$$

가 됩니다. 100번째 층의 점의 개수는 495개입니다.

다시 합을 구하는 공식을 리용하여 점방진의 2층부터 100층까지의 총점의 개수를 계산합니다.

$$5+10+15+\cdots+495=(5+495)\times 99\div 2$$
$$=500\times 99\div 2=24750$$
입니다. 이 5각형점방진의 총점의 개수는
$$1+24750=24751$$
입니다.

답. 100층의 점방진에 모두 24751개의 점이 있습니다.

[설명] 이 문제를 다른 방법으로 풀수 없겠는가를 생각해보십시오.

앞의 두 실례에서 보는바와 같이 수렬이 같은차수렬이 아니고 그 일부 몇개 부분이 같은차수렬일 때 이 수렬의 합을 구할것을 요구하면 먼저 갈라서 합을 구한 다음 다시 총합을 구해야 합니다.

실례 8. 아빠트의 매 살림집번호는 1부터 시작하여 차례로 매겨져있습니다. 만일 우리 집을 제외한 나머지 집들의 번호를 더한 다음 거기서 우리 집번호를 덜면 100이 됩니다. 우리 집번호는 얼마이며 아빠트에는 몇세대가 있겠습니까?

따져보기와 풀기

이 아빠트에 n세대가 산다고 가정하면 아빠트전체의 번호는 $1, 2, 3, \cdots, n$이고 같은차수렬을 이룹니다.

또한 문제의 조건에 의하여

우리 집을 제외한 나머지 집들의 번호합－우리 집번호=100이 된다는것을 알수 있습니다.

주어진 조건을 다음과 같이 고칩시다.

(우리 집을 제외한 나머지 집들의 번호합 + 우리 집번호)－2×우리 집번호 ＝100

즉 아빠트전체의 번호합－2×우리 집번호 ＝100

$(1+2+3+\cdots+n)-2\times$우리 집번호 $=100$

이 같기식으로부터 n에 대한 다음의 두가지 요구가 제기된다는것을 알수 있습니다.

① $1+2+3+\cdots+n > 100$

② $(1+2+3+\cdots+n)-100 = 2\times$우리 집번호

이것은 $(1+2+3+\cdots+n)-100$은 짝수이여야 한다는것을 보여줍니다.

①, ②에 의하여 n을 구할수 있고 따라서 이 아빠트에 몇세대가 사는가를 알수 있습니다.

이제 n이 어떤 값을 가질 때 조건이 만족되겠는가를 봅시다.

$n = 14$일 때

$$1+2+3+\cdots+n = 1+2+3+\cdots+14 = (1+14)\times 14 \div 2 = 105$$

가 됩니다. $105 > 100$이므로 조건 ①을 만족시킵니다. 그런데 $105-100=5$는 짝수가 아닙니다. 조건 ②를 만족시키지 못합니다. 그러므로 $n\neq 14$입니다.

$n = 15$일 때

$$1+2+3+\cdots+n = 1+2+3+\cdots+15 = (1+15)\times 15 \div 2 = 120$$

이 됩니다. $120 > 100$, $120-100 = 20$은 짝수이므로 조건①, ②를 만족시킵니다. 그러므로 $n = 15$입니다. 즉 이 아빠트에는 15세대가 삽니다.

조건 ②로부터

$2\times$우리 집번호$=120-100=20$이므로 우리 집번호는 $20\div 2=10$호입니다.

$n = 16$일 때

$$1+2+3+\cdots+n = 1+2+3+\cdots+16 = (1+16)\times 16 \div 2 = 136$$

이고 $136 > 100$, $136-100 = 36$은 짝수입니다.

문제의 조건을 만족시키겠습니까?

조건 ②로부터 우리 집번호는 $36\div 2=18$번이라는것을 알수 있습니다. 그런데 아빠트에 16세대가 살고있으므로 이것은 불가능합니다. 그러므로 $n\neq 16$입니다. 이로부터 이 문제에는 우리 집번호$\leqq n$ 즉 우리 집번호가 아빠트에 있는 세대수를 넘을수 없다는 조건이 있습니다.

꼭 같은 방법으로 하면 $n>16$일 때도 조건을 만족시키지 못한다는것을 알수 있습니다.

답. 우리 집번호는 10이며 우리 아빠트에는 15세대가 삽니다.

[설명] 이 실례에는 두가지 특성이 있습니다. 그 하나는 조건이 숨어있는것입니다. 따져보는 과정에 n에 대한 세가지 요구조건이 있으며 이것은 문제를 풀 때 n을 구하는 중요조건으로 된다는것을 알수 있습니다. 앞으로 이와 같은 문제를 풀 때 문제를 잘 따져 주어진 조건을 명백히 밝혀야 합니다. 다른 하나는 같은차수렬 1, 2, 3,⋯, n에서 $a_1=1$, $d=1$이라는 두 조건만 알고있으므로 일반항 구하는 공식 또는 합을 구하는 공식을 직접 쓸수 없으며 n에 대한 세가지 요구조건에 의하여 계산해보아야 합니다.

실례 9. 모양이 꼭 같은 함이 한줄로 놓여있습니다. 50여개의 바둑돌을 갈라서 함안에 넣었는데 그중 한개 함에는 바둑돌을 넣지 않았습니다. 윤미가 밖으로 나간 다음 윤선이는 바둑돌이 있는 함들에서 각각 1개씩 꺼내여 빈 함에 넣고 함을 다시 정리해놓았습니다. 윤미가 돌아와서 자세히 살펴보았으나 함과 바둑돌을 움직였다는것을 알아내지 못하였습니다. 함이 모두 몇개였습니까?

따져보기와 풀기

함이 모두 몇개인가를 알기 위하여서는 바둑돌을 어떻게 넣었겠는가를 알아야 합니다.

다음과 같이 생각할수 있습니다. 빈 함외에 n개 함이 있다고 가정합니다. 윤미가 돌아와서 볼 때 본래 비여있던 함이 지금은 비여있지 않습니다. 윤미가 왜 찾아내지 못하였겠습니까? 분명히 다른 한개 함이 빈 함으로 되여 있을것입니다. 이것은 본래부터 어떤 한개 함에는 한개의 바둑돌만 들어있었다는것을 말해줍니다.

본래 한개의 바둑돌만이 들어있는 함이 빈함으로 된 다음 어떤 한개의 함이 그것을 대신하여야 합니다. 이때 그것을 대신한 함은 본래 2개의 바둑돌이 들어있었다는것을 알수 있습니다. 이와 같이 생각하면 윤미가 바둑돌을 놓은 방식이

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n$$

이라는것을 알수 있습니다. 이 같은차수렬에 의하여 n을 구할 방도를 찾으면 됩니다.

문제의 조건에 의하여

$$50 < 1+2+3+\cdots+n < 60$$

이 됩니다.

같은차수렬의 합 구하는 공식을 리용하여 계산해봅시다.

$n=9$일 때

$$1+2+3+\cdots+9=(1+9)\times 9\div 2$$
$$=45$$ (문제의 조건에 맞지 않습니다.)

$n=10$일 때

$$1+2+3+\cdots+10=(1+10)\times 10\div 2$$
$$=55$$ (문제의 조건을 만족시킵니다.)

$n=11$일 때

$$1+2+3+\cdots+11=(1+11)\times 11\div 2$$
$$=66$$ (문제의 조건에 맞지 않습니다.)

이것은 빈 함외에 10개의 함이 있다는것을 보여줍니다.

답. 모두 11개의 함이 있었습니다.

련습 10

1. 수 4로 나누면 나머지가 1이 되는 모든 두자리수의 합을 구하십시오.

2. 10개의 자물쇠와 10개의 열쇠가 있는데 자물쇠와 열쇠가 뒤섞이여서 해당한 쌍을 맞추지 못합니다. 가장 많아서 몇번을 맞추어보면 자물쇠와 열쇠의 쌍을 맞출수 있겠습니까?

3. 윤미가 1부터 시작하여 잇닿아있는 몇개 자연수의 합을 구하였는데 1을 10으로 계산하였기때문에 답이 틀렸습니다. 그 답은 100이였습니다. 틀린 결과를 바로 잡을수 있습니까? 윤미가 계산한것이 어떤 자연수의 합이겠습니까?

4. 잇닿아있는 24개의 자연수의 합이 1992개입니다.

그가운데서 최대인 한개 짝수는 몇이겠습니까?

5. 평양부터 청진까지의 급행렬차는 첫 출발역과 마지막 도착역밖에 또 6개의 역에 서야 합니다. 몇가지 차표가 필요하겠습니까?

6. 영호와 철호가 달리기경기를 합니다. 시간은 10초입니다. 이 10초동안에 달린 거리가 많은 사람이 이깁니다. 철호는 1초동안에 1m를 달리고 그다음부터는 1초동안에 먼저번 1초동안보다 0.1m씩 더 달립니다. 영호는 1초동안에 1.5m씩 달립니다. 누가 이기겠습니까?

7. 다음의 수자방진도가 있습니다. 모든 수의 합을 구하십시오.

1, 2, 3, ⋯ , 98, 99, 100
2, 3, 4, ⋯ , 99, 100, 101
3, 4, 5, ⋯ , 100, 101, 102
4, 5, 6, ⋯ , 101, 102, 103
⋯
100, 101, 102, ⋯ ,197, 198, 199

8. 10개 함에 44개의 탁구공이 들어있습니다. 44개의 탁구공을 함안에 넣되 매 함안에 들어가는 탁구공의 알수가 서로 다르게 할수 있겠습니까?

답

1. 1,210 2. 45번 3. 1+2+3+⋯+13 (1을 10으로 잘못보았다는것은 더하는수가 9만큼 더 커졌다는것을 의미합니다.) 4. 최대짝수는 106입니다. 5. 56가지 차표(출발역부터 도착역까지의 차표와 도착역에서 출발역까지의 차표는 다릅니다.) 6. 철호가 이깁니다. 7. 1000000 8. 불가능합니다.

제11절. 합구하기기교

앞절에서 같은차수렬의 일반항 구하는 공식, 항수를 구하는 공식 및 합을 구하는 공식을 보았습니다. 이 절에서는 이 지식을 리용하여 문제를 어떻게 풀겠는가를 학습합니다.

실례 1. 길이가 꼭 같은 3대의 성냥가치로 한개의 바른3각형을 만듭니다. 그림 11－1과 같이 이러한 바른3각형을 큰 바른3각형안에 가득 채웁니다. 만일 이 큰 바른3각형의 밑변이 10대의 성냥가치만큼한 길이라면 모두 몇개의 성냥가치가 들어있겠습니까?

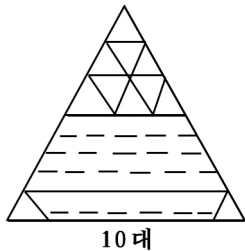



그림 11－1

따져보기와 풀기

그림에서 제일 꼭대기에 있는 3각형(1개)을 1층으로 보고 그와 련결되여있는 3개의 3각형 (우로 향한 3각형 2개, 아래로 향한 3각형 1개)을 2층으로 본다면 이 그림에는 모두 10층으로 된 3각형이 있게 됩니다.

이와 같이 10층으로 된 3각형의 매 층에 들어있는 성냥가치의 개수는 차례로 3, 6, 9,⋯, 30이 됩니다. 이것은 같은차수렬을 이루는데 첫 항은 3이고 같은차는 3이며 항수는 10개입니다. 따라서 성냥가치의 총 개수를 구할수 있습니다. 즉 이 같은차수렬의 매 항의 합을 구하면 됩니다. 즉

$$3+6+9+\cdots+30=(3+30)\times10\div2=33\times10\div2=330\div2=165\text{ (대)}$$

답. 모두 165대의 성냥가치가 들어있습니다.

실례 2. 잇닿아있는 15개 홀수의 합은 1995입니다. 그가운데서 최대홀수는 얼마이겠습니까?

따져보기와 풀기 1:

잇닿아있는 15개 홀수는 같은차수렬이므로 최대홀수는 이 수렬의 마지막 항입니다. 즉 15번째 항입니다.

이 같은차수렬의 합이 1995이고 같은차가 2이며 항수가 15이라는것을 알고있으므로 일반항 구하는 공식과 합 구하는 공식을 리용하여 첫 항을 구할수 있고 다시 마지막 항을 구할수 있습니다.

최소홀수 즉 첫 항을 x라고 하면 같은차수렬의 일반항 구하는 공식으로부터 15번째 항이 $x+(15-1)\times2 = x + 28$이 된다는것을 알수 있습니다. 같은차수렬의 합 구하는 공식에 의하여

$$(x+x+28)\times15\div2 = 1995$$
$$(2x+28)\times15\div2 = 1995$$
$$2x+28 = 1995\times2\div15$$
$$2x+28 = 266$$
$$2x = 238$$
$$x = 119$$

그러므로 15번째 항은 $119+28 = 147$입니다.

따져보기와 풀기 2:

다른 풀이법을 찾기 위하여 간단한 문제 실례들 들면 잇닿아있는 5개 홀수합인 경우를 생각합시다.

$$3+5+7+9+11 = 35$$

잇닿아있는 5개 홀수의 합이 35인데 이것은 가운데항 7에 항수 5를 곱하면 얻어집니다. 반대로 5으로 35를 나누면 가운데항 7이 얻어집니다.

이 원리에 의하여 이 문제에서 잇닿아있는 15개 홀수의 합이 1995이므로 이 같은차수렬의 가운데항을 구할수 있습니다. 다시 일반항 구하는 공식을 리용하여 마지막 항을 구할수 있습니다.

이 잇닿아있는 15개 홀수의 가운데항은

$$1995\div15 = 133$$

입니다.

만일 가운데항을 첫 항으로 본다면 본래의 마지막 항 즉 15번째 항은 8번째 항으로 됩니다. 이로부터 최대홀수는

$$133+(8-1)\times 2=133+14=147$$

이 됩니다.

답. 최대홀수는 147입니다.

이 방법을 써서 잇닿아있는 15개 홀수중에서 최소홀수를 구하려 한다면 어떻게 하겠는가를 생각해보십시오.

실례 3. 윤미가 자연수 1부터 시작하여 더해나갔는데 어떤 수까지 더했을 때 그 합이 1997이 되였습니다. 그런데 그는 어떤 한 수를 제대로 더하지 못하였다는것을 알았습니다. 윤미가 빼놓은 수가 어느 수이겠습니까?

따져보기와 풀기

주어진 조건으로부터 윤미는 1, 2, 3,…, x의 매 항을 더했다는것을 알수 있습니다. 여기서 x는 미지수 (모르는 수)입니다. 윤미가 빼놓은 수를 알려면 먼저 x를 구해야 합니다.

윤미가 어떤 한개 수를 빼놓았다고 하면

$$1+2+3+\cdots+x>1997$$

이 성립합니다.

같은차수렬의 합의 공식에 의하여

$$(1+x)\times x\div 2>1997$$

즉

$$(1+x)\times x>3994$$

가 됩니다.

이제 x를 계산해봅시다.

$$63\times 62=3909<3994$$

$$64\times 63=4032>3994$$

이므로 $x=63$입니다.

이로부터 만일 윤미가 한개 수를 빼놓지 않았다면 그가 진행한 더하기는

$$1+2+3+\cdots+63=(1+63)\times 63\div 2=32\times 63=2016$$

$$2016-1997=19$$

가 됩니다.

답. 윤미가 제대로 더하지 못한 수는 19입니다.

실례 4. 어떤 기업소에서 공사장에 30일동안 로동자들을 보내여 일을 하였는데 첫날부터 시작하여 매일 꼭같은 인원수의 로동자들을 추가로 계속 파견하였습니다. 기업소에는 아직도 240명의 로동자가 남아있습니다. 만일 이 30일동안에 기업소로동자들의 총 작업량을 계산하면 8070으로 됩니다 (한 사람이 하루 일하는 량을 1로 봅니다). 한 사람의 결근도 없다면 이 기간에 기업소에서 공사장에 파견한 로동자수는 모두 몇명이겠습니까?

따져보기와 풀기

표 11－1

날자	1	2	3	···	29	30
매일 공사장에 파견된 인원수	x	x	x	···	x	x
매일 공사장에 파견된 인원수합	x	2x	3x	···	29x	30x
공사장에 파견된 로동자들의 작업량	29x	28x	27x	···	x	0

표 11－1에서 볼수 있는바와 같이 30일동안에 공사장에 파견된 로동자들의 작업량은 차례로

$$29x,\quad 28x,\quad 27x,\ \cdots,\ 2x,\quad x$$

가 됩니다. 이것을 거꾸로 쓰면

$$x,\quad 2x,\quad 3x,\ \cdots,\ 28x,\quad 29x$$

로 됩니다.

이것은 첫 항이 x이고 같은차가 x이며 모두 29항으로 된 같은차수렬입니다.

따라서 30일동안에 파견된 로동자들의 작업량은 모두

$$x+2x+3x+\cdots+28x+29x=(x+29x)\times 29\div 2$$
$$=15x\times 29=435x$$

라는것을 알수 있습니다.

동시에 주어진 조건에 의하여 30일동안에 공사장에 파견된 로동자들의 작업량은

$$8070-240\times30=8070-7200=870$$

이 된다는것을 알수 있으며 따라서

$$435x=870$$
$$x=2$$

입니다.

이로부터 30일동안에 기업소에서 공사장에 파견된 로동자수는 모두

$$2\times30=60\ (\text{명})$$

입니다.

답. 공사장에 파견된 로동자수는 모두 60명입니다.

실례 5. 자연수를 다음과 같이 배렬하였습니다.

1	3	6	10	15	21	28	…
2	5	9	14	20	27	…	…
4	8	13	19	26	…	…	…
7	12	18	25	…	…	…	…
11	17	24	…	…	…	…	…
16	23	…	…	…	…	…	…
22	…	…	…	…	…	…	…

100번째 행의 첫번째 수는 몇이겠습니까? 왼쪽 웃모서리로부터 시작된 대각선우의 100번째 수는 몇이겠습니까?

따져보기와 풀기

문제에서 준 자연수의 배렬형식을 관찰하여 행과 렬 대각선우에 있는 수의 매 배렬규칙을 찾아야 합니다.

① 제1렬

우로부터 아래로 내려가면서 차례로 1, 2, 4, 7, 11, …입니다. 이것을 다음과 같이 쓸수 있습니다.

$$
\begin{aligned}
&1\\
&2=1+1\\
&4=1+1+2\\
&7=1+1+2+3\\
&11=1+1+2+3+4\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

이 규칙에 따라 제1렬의 100번째 수는

$$\begin{aligned}&1+1+2+3+\cdots+98+99\\&\quad=1+(1+99)\times 99\div 2\\&\quad=1+100\times 99\div 2\\&\quad=1+9900\div 2\\&\quad=1+4950\\&\quad=4951\end{aligned}$$

이라는것을 알수 있습니다.

제1렬의 100번째 수 즉 100번째 행의 첫번째 수입니다. 그러므로 100번째 행의 첫번째 수는 4951입니다.

② 왼쪽 웃모서리로부터 시작된 대각선

왼쪽우로부터 오른쪽아래로 가면서 차례로 1, 5, 13, 25,…인데 이것을 다음과 같은 형식으로 쓸수 있습니다.

$$\begin{aligned}&1\\&5=1+4\\&13=1+4+8\\&25=1+4+8+12\\&\cdots\end{aligned}$$

이 규칙에 따르면 왼쪽 웃모서리로부터 시작되는 대각선우의 100번째 수는

$$\begin{aligned}&1+4+8+12+\cdots+4\times(100-1)\\&\quad=1+4+8+12+\cdots+4\times 99\\&\quad=1+(4+4\times 99)\times 99\div 2\\&\quad=1+400\times 99\div 2\\&\quad=1+39600\div 2\\&\quad=1+19800\\&\quad=19801\end{aligned}$$

이 됩니다.

답. 100번째 행의 첫번째 수는 4951이고 대각선우의 100번째 수는 19801입니다.

실례 6. 자연수가 다음과 같이 배렬되여있습니다.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 2 & 3 & 4 & & & \\ & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & \\ & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ & & & & \cdots & & & & \end{array}$$

20번째 행의 제일 왼쪽끝에 있는 수는 얼마이겠습니까? 20번째 행의 모든 수의 합은 얼마이겠습니까?

따져보기와 풀기 1

① 표의 제일 왼쪽에 있는 수는 차례로 1, 2, 5, 10, 17,…인데 그것을 다음과 같이 쓸수 있습니다.

$$\begin{aligned} &1 \\ &2 = 1+1 \\ &5 = 1+1+3 \\ &10 = 1+1+3+5 \\ &17 = 1+1+3+5+7 \\ &\cdots \end{aligned}$$

이 규칙에 따라 표에 있는 20번째 행의 왼쪽끝에 있는 수는

$$\begin{aligned} &1+1+3+5+7+\cdots+[1+(19-1)\times 2] \\ &= 1+1+3+5+7+\cdots+37 \\ &= 1+(1+37)\times 19\div 2 \\ &= 1+19\times 19 \\ &= 362 \end{aligned}$$

라는것을 알수 있습니다.

② 20번째 행에 몇개의 수가 있는가를 구합니다.

우로부터 아래로 내려가면서 매 행에 있는 수의 개수는 차례로 1, 3, 5, 7, …로서 같은차수렬을 만듭니다. 그러므로 20번째 행에 있는 수의 개수는 이 같은차수렬의 20번째 항 즉

$$1+(20-1)\times 2 = 39$$

입니다.

따라서 20번째 행에는 39개 수가 있습니다.

③ 20번째 행의 오른쪽끝에 있는 한개 수는 얼마이겠습니까?

매 행은 모두 잇닿아있는 자연수이므로 같은차가 1인 같은차수렬입니다. 그러므로 20번째 행의 오른쪽끝에 있는 한 수는 20번째 행의 39번째 수입니다. 즉 첫 항이 362이고 같은차가 1인 수렬의 39번째 항입니다. 즉

$$362+(39-1)\times 1=362+38=400$$

입니다. 이로부터 20번째 행의 모든 수의 합은

$$(362+400)\times 39\div 2=762\times 39\div 2=14859$$

가 됩니다.

따져보기와 풀기 2

오른쪽끝에 있는 수는 차례로

$$1, 4, 9, 16, 25, \cdots$$

인데 이 수렬의 매 항은 항수의 두제곱입니다. 이로부터 19번째 행의 오른쪽끝의 한 수는 $19\times 19=361$이고 20번째 행의 오른쪽끝의 한 수는 $20\times 20=400$입니다.

이로부터 20번째 행의 왼쪽끝의 수는

$$361+1=362$$

라는것을 알수 있습니다.

20번째 행에는

$$400-361=39\ (개)$$

의 수가 있습니다.

20번째 행에 있는 모든 수의 합은

$$(362+400)\times 39\div 2=14859$$

입니다.

답. 20번째 행에 있는 왼쪽끝의 수는 362이고 20번째 행의 모든 수의 합은 14859입니다.

실례 7. 두자리수의 자연수중에서 매번 서로 다른 두 수를 취하여 이 두 수의 합이 세자리수로 되게 하려고 합니다. 몇가지 방법이 있겠습니까?

있을수 있는 모든 수를 써보는 방법을 쓸수 있습니다. 두 자리수를 작은 수로부터 큰 수의 차례로 적어봅니다. 먼저 가장 작은 두 자리수 10부터 생각합니다. 그와 어떤 두 자리수의 합이 세자리수로 되겠는가를 생각합니다. 이런 식으로 가장 큰 두자리 자연수 99까지 따져본 다음 그 가지수를 계산합니다.

10에 각각 90, 91, 92,…, 98, 99를 더하면 그 합이 세자리수로 됩니다. 모두 10가지 방법이 있습니다.

11에 각각 89, 90, 91,…, 98, 99를 더하면 그 합이 세 자리수로 됩니다. 모두 11가지 방법이 있습니다.

12에 각각 88, 89, 90,…, 98, 99를 더하면 그 합이 세자리수로 됩니다. 모두 12가지 방법이 있습니다.

…

49에 각각 51, 52, 53,…, 98, 99를 더하면 그 합이 세자리수로 됩니다. 모두 49가지 방법이 있습니다.

50에 각각 51, 52, 53,…, 98, 99를 더하면 그 합이 세자리수로 됩니다. 모두 49가지 방법이 있습니다.

51에 각각 52, 53, 54,…, 98, 99를 더하면 그 합이 세자리수로 됩니다. 모두 48가지 방법이 있습니다.

52에 각각 53, 54, 55,…, 98, 99를 더하면 그 합이 세자리수로 됩니다. 모두 47가지 방법이 있습니다.

…

97에 각각 98, 99를 더하면 그 합이 세자리수로 됩니다. 모두 2가지 방법이 있습니다.

98과 99의 합이 세자리수입니다. 모두 한가지방법이 있습니다.

종합하면 다음과 같습니다.

$$(10+11+12+\cdots+48+49)+(1+2+3+\cdots+48+49)$$
$$=(10+49)\times 40\div 2+(1+49)\times 49\div 2$$
$$=59\times 20+25\times 49=2405$$

답. 모두 2405가지 방법이 있습니다.

실례 8. 어떤 수렬이 있습니다.

$$1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, \cdots$$

① 12는 이 수렬의 몇번째 항부터 몇번째 항사이에 있습니까?

② 이 수렬의 50번째 수는 몇이겠습니까?

③ 이 수렬에서 앞으로부터 50개 수의 합은 얼마입니까?

따져보기와 풀기

이 수렬의 수들을 몇개 부분으로 갈라서 생각합니다. 즉 같은 수를 한개의 부분으로 묶습니다. 매 부분에 들어가는 수의 개수에 대한 규칙을 찾아 다음과 같이 쓸수 있습니다.

수 1, 2, 3, 4, ⋯, 11, ⋯

개수 1, 3, 5, 7, ⋯, ?, ⋯

이 표에서 볼수 있는바와 같이 이 수들에서 매 부분의 수들의 개수를 순서에 따라 배렬하면 1, 3, 5, 7,⋯로 됩니다. 이것은 작은 수로부터 큰 수의 순서로 배렬된 홀수로 된 같은차수렬입니다.

표에 표시된 대응관계에 따라 《11》이 있는 부분의 수들의 개수는 수렬 1, 3, 5, 7, ⋯의 11번째 항입니다. 《11》이 있는 이 부분의 개수는

$$1+(11-1)\times 2 = 21\ (개)$$

입니다.

① 이 수렬의 앞 11개 부분의 수들의 개수는

$$1+3+5+\cdots+21= (1+21)\times 11\div 2= 242\div 2= 121\ (개)$$

입니다. 또한 12번째 부분에 있는 수의 개수 즉 《12》의 개수는

$$1+(12-1)\times 2 = 23\ (개)$$

입니다. 그러므로 이 수렬의 122번째부터 121+23=144번째 사이에 있습니다.

② 이 수렬의 앞 7개 부분의 수들의 개수는

$$1+3+5+7+9+11+13= (1+13)\times 7\div 2= 7\times 7= 49\ (개)$$

입니다. 따라서 50번째 수는 8이라는것을 알수 있습니다.

③ 이 수렬의 앞 50개 수의 합은

$$1+2\times3+3\times5+4\times7+5\times9+6\times11+7\times13+8\times1$$
$$=1+6+15+28+45+66+91+8=260$$

입니다.

련습 11

1. 평면우에 50개의 점이 있는데 세 점은 한 직선우에 놓이지 않습니다. 이 점을 지나는 직선을 몇개 그을수 있습니까?

2. 그림 11−2와 같이 바른3각형의 매 변을 2등분했을 때 정점이 아래로 향한 작은 3각형은 1개(빗선을 친 부분)이고 3, 4등분했을 때 정점이 아래로 향한 작은 3각형은 각각 3개와 6개입니다. 만일 변을 10등분, 20등분하였다면 정점이 아래로 향한 작은 3각형은 각각 몇개입니까?

그림 11−2

3. 1,998을 잇닿아있는 28개의 짝수의 합으로 표시하려고 합니다. 그중에서 최대짝수는 얼마입니까?

4. 학교에서 탁구선수선발경기를 합니다. 경기에 참가하는 매 선수는 나머지 모든 선수들과 한번씩 경기를 진행해야 합니다. 78번의 경기가 진행되였다면 선발경기에 참가한 선수는 몇명이겠습니까?

5. 1~9번까지의 통에 공이 들어있습니다. 여기에 들어있는 공은 모두 351개이고 매 통안에 있는 공은 앞의 통에 있는 공의 개수차와 꼭 같은 개수만큼 더 들어있습니다. 만

일 1번 통안에 11개의 공이 들어있다면 뒤에 있는 통안의 공은 그앞에 있는 통안의 공보다 몇개 더 많겠습니까?

6. A역부터 B역까지는 기차가 출발역과 도착역을 제외하고 10개의 역에 멎습니다. 모두 몇가지 차표가 있어야 하겠습니까?

7. 모든 두자리수중에서 열의 자리수가 하나 자리수보다 작은 두 자리수는 몇개입니까?

8. 수렬 1, 1993, 1992, 1, 1991, 1990, 1,…이 있습니다. 세번째 수부터 시작하여 매개 수는 모두 그앞에 있는 최대수에서 작은 수를 덜어낸 차와 같습니다. 첫번째 수부터 시작하여 1993개 수의 합을 구하십시오.

답

1. 첫번째 점과 나머지 49개 점에 49개의 직선을 그을수 있고 두번째 점과 나머지 48개 점에 48개의 직선을 그을수 있습니다. 세번째 점과 나머지 47개 점에 47개의 직선을 그을수 있습니다. … 49번째 점과 50번째 점에 1개의 직선을 그을수 있습니다.

   1225개 그을수 있습니다.

2. 바른3각형의 매 변을 2등분, 3등분, 4등분,…할 때마다 정점이 아래로 향한 3각형이 차례로 1, 3, 6,…인 수렬을 만듭니다.

   10등분할 때 45개, 20등분할 때 190개 있습니다.

3. 98 4. 13명. 선발경기에 참가한 선수인원을 x로 하고 계산합니다.

5. 매 통안에 있는 공의 개수는 그앞에 있는 통안의 개수보다 x개 더 많다고 합니다. 7개

6. 132가지 7. 열의 자리수를 분류합니다. 36개

8. 1993번째 수와 1992번째 수를 구하고 1993개 수의 합을 구합니다. 1766241

제12절. 새 연산의 정의

우리는 일반적인 넉셈 즉 더하기, 덜기, 곱하기, 나누기를 잘 알고있습니다. 그런데 실제생활에서는 이것을 쓸수 없는 경우가 있습니다. 실례들 들면 날자와 관계되는 문제에서 일반적인 더하기가 통하지 않을 때가 있습니다.

시계에서의 시간표시를 보면 1시에서 1시간이 지나면 2시 즉 $1+1=2$로 계산됩니다. 1시부터 14시간이 지나면 15시라고 말합니다. 다시 40시간이 지나면 41시가 되는데 이렇게 말하는 사람은 없습니다.

이 실례에서는 어떤 문제에서는 특수한 연산이 필요하다는것을 보여줍니다. 여기서 말하는 특수한 연산이란 사실은 새 연산을 의미합니다.

실례 1. 어떤 옹근수의 《더하기》연산이 다음과 같이 정의되였다고 합시다. 두 옹근수의 합이 7보다 작을 때 《더하기》의 결과가 합이 되고 그밖의 더하기결과는 이 수를 7로 나눈 나머지입니다. 이 법칙에 의하여 1과 5의 《더하기》결과, 3과 8의 《더하기》결과, 9와 5의 《더하기》결과가 어떻게 되겠습니까?

풀기 《더하기》를 $*$로 표시합시다. $a*b$의 결과는 먼저 $a+b$를 계산한 다음 다시 결정해야 합니다.

실례를 들면 $1+5=6<7$이므로 $1*5=6$입니다.

$3+8=11>7$이므로 $11\div7=1\cdots4$입니다. 따라서 $3*8=4$입니다.

$9+5=14>7$이므로 $14\div7=2\cdots0$입니다. 따라서 $9*5=0$ 입니다.

여기서 지적한 $*$는 하나의 기호로서 연산을 표시합니다. 구체적으로 어떤 뜻을 가지는가 하는것은 문제에 따라 결정됩니다.

일반적으로 이런 연산기호는 일상적으로 쓰는 $+$, $-$,

×, ÷와 구별하여 ⊕, ⊙, ⊛, ⊗, 와 같은 부호를 씁니다.

실례 2. *가 표시하는 연산정의는 실례 1과 같습니다. $4*4*4$, $4*(4*4)$를 계산하십시오.

풀기 $4*4*4=(4*4)*4$

$=1*4=5$

$4*(4*4)$

$=4*1=5$

실례 3. ⊙가 표시하는 연산이 다음과 같이 정의되였습니다.

$$a\odot b=3\times a+2\times b$$

다음 식을 계산하십시오.

① $4\odot 5$　　② $5\odot 4$

③ $4\odot 2\odot 3$,　　④ $5\odot(2\odot 3)$

풀기 ① $4\odot 5=3\times 4+2\times 5=22$

② $5\odot 4=3\times 5+2\times 4=23$

③ $4\odot 2\odot 3=(4\odot 2)\odot 3$

$=(3\times 4+2\times 2)\odot 3=16\odot 3$

$=3\times 16+2\times 3=54$

④ $4\odot(2\odot 3)=4\odot(3\times 2+2\times 3)=4\odot 12$

$=3\times 4+2\times 12=36$

시간계산연산

일상생활에서 우리는 0시, 1시,…, 13시, 23시라는 말을 씁니다. 시간을 말할 때 쓰이는 옹근수는 0~23까지의 옹근수입니다. 시간을 표시하는데 새 연산 *을 다음과 같이 정의합니다.

《두 옹근수의 합이 24보다 작으면 결과는 합이고 그 나머지 경우는 이 합을 24로 나누었을 때의 나머지입니다.》

실례를 들면 $5*6=11$(시), $10*30=40\div 24=1\cdots 16$ 즉 16시입니다.

실례 4. $a \odot b = 3\times a - 2\times b$로 정의하고 $9\odot(x\odot 1) = 7$입니다. x를 구하십시오.

풀기 $9\odot(x\odot 1) = 7$을 다음과 같이 갈라서 생각합시다.

이 식에서 7은 9와 어떤 수를 ⊙로 연산한 결과입니다. $x\odot 1$을 한개의 수 y로 보면 $9\odot y = 7$이 됩니다. 먼저 y를 구합니다.

정의로부터 $3\times 9 - 2\times y = 7$이 됩니다. 이 식을 정돈하면 $27 - 2\times y = 7$이 됩니다. 따라서 $y = 10$입니다.

$y = 10$이므로 $x\odot 1 = 10$ 즉 $3\times x - 2\times 1 = 10$이고 따라서 $x = 4$입니다.

답. x는 4입니다.

실례 5. $x * y = a\times x + 2\times y$ 이고 $5 * 6 = 6 * 5$로 정의되였습니다. a는 어떤 수이겠습니까?

풀기 $5 * 6 = 5a + 2\times 6$

$6 * 5 = 6a + 2\times 5$

그러므로 $5a + 12 = 6a + 10$이고 따라서 $a = 2$입니다.

이 문제에서 $*$의 의미는 $x * y = 2\times x + 2\times y = 2\times(x + y)$ 즉 합의 2배입니다.

실례 6. 연산 ※는 a※$b = a\times b - (a + b)$로 정의되였습니다.

① 5※7, 7※5을 계산하십시오.

② 12※(3※4), (12※3) ※4을 계산하십시오.

③ 연산 ※에 바꿈법칙, 묶음법칙이 성립하겠습니까?

④ 3※(5※x) = 3이면 x는 얼마이겠습니까?

풀기 ① 5 ※ 7 = $5\times 7 - (5 + 7) = 35 - 12 = 23$

7※5 = $7\times 5 - (7+5) = 35 - 12 = 23$

② 12※(3※4)를 계산하려면 먼저 괄호안의 수를 계산합니다.

3※4 = $3\times 4 - (3+4) = 5$

12※5 = $12\times 5 - (12+5) = 60 - 17 = 43$

그러므로 12※(3※4) = 43

(12※3) ※4의 계산에서도 괄호안의 수를 먼저 계산하

여야 합니다.

$$12※3 = 12\times3-(12+3) = 21$$
$$21※4 = 21\times4-(21+4) = 59$$

따라서 $(12※3)\ ※4 = 59$

③ $a※b = a\times b-(a+b)$ 이므로

$$b※a = b\times a-(b+a)$$
$$= a\times b-(a+b)$$

따라서 $a※b = b※a$

그러므로 연산※에 대하여 바꿈법칙이 성립합니다. 문제②에서 알수 있는바와 같이 연산※에 대하여 묶음법칙은 성립하지 않습니다.

④ $5※x = 5x-(5+x) = 4x-5$

$$3※(5※x) = 3※(4x-5)$$
$$= 3(4x-5)-(3+4x-5)$$
$$= 12x-15-(4x-2)$$
$$= 8x-13$$

이므로 $8x-13 = 3$

$$x = 2$$

따라서 x는 2입니다.

실례 7. 연산 $\oplus$를 $a\oplus b = a\times b+a+b$로 정의합니다.

① $6\oplus2,\ 2\oplus6$을 계산하십시오.

② $(1\oplus2)\oplus3,\quad 1\oplus(2\oplus3)$을 계산하십시오.

③ 이 연산에서 바꿈법칙과 묶음법칙이 성립하겠습니까?

풀기 ① $6\oplus2 = 6\times2+6+2 = 20$

$$2\oplus6 = 2\times6+2+6 = 20$$

② $(1\oplus2)\oplus3 = (1\times2+1+2)\oplus3 = 5\oplus3$

$$= 5\times3+5+3 = 23$$
$$1\oplus(2\oplus3) = 1\oplus(2\times3+2+3) = 1\oplus11$$
$$= 1\times11+1+11 = 23$$

③ 《$\oplus$》 연산이 바꿈법칙을 만족시키는가를 봅시다.

$a \oplus b = a \times b + a + b$
$b \oplus b = b \times a + b + a$
$= a \times b + a + b$

따라서$(a \oplus b) = (b \oplus a)$입니다.

이제 연산 《※》가 묶음법칙을 만족시키는가를 봅시다.

$(a \oplus b) \oplus c = (a \times b + a + b) \oplus c$
$= (a \times b + a + b) \times c + a \times b + a + b + c$
$= abc + ac + bc + ab + a + b + c$

$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b \times c + b + c)$
$= a \times (b \times c + b + c) + a + b \times c + b + c$
$= abc + ab + ac + a + bc + b + c$
$= abc + ac + bc + ab + a + b + c$

따라서 $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

즉 연산 《※》은 묶음법칙도 성립합니다.

[설명] 일반적인 더하기에 대하여 연산 《$\oplus$》는 분배법칙을 만족시키지 못합니다. 실례를 듭시다.

$1 \oplus (2+3) = 1 \oplus 5 = 1 \times 5 + 1 + 5 = 11$
$1 \oplus 2 + 1 \oplus 3 = 1 \times 2 + 1 + 2 + 1 \times 3 + 1 + 3$
$= 5 + 7 = 12$

따라서 $1 \oplus (2+3) \neq 1 \oplus 2 + 1 \oplus 3$입니다.

실례 8. x, y는 두 수를 표시합니다. 새 연산 《$*$》와 《$\triangle$》을 다음과 같이 정의합니다.

$x * y = mx + ny$, $x \triangle y = kxy$ (여기서 m, n, k는 자연수).

$1 * 2 = 5$, $(2 * 3) \triangle 4 = 64$입니다.

$(1 \triangle 2) * 3$의 값을 구하십시오.

따져보기 문제에서 $(1 \triangle 2) * 3$의 값을 계산할것을 요구하므로 먼저 $1 \triangle 2$의 값을 계산합니다. 《$\triangle$》의 정의에 의하여 $1 \triangle 2 = k \times 1 \times 2 = 2k$가 됩니다. k의 값을 알지 못하므로 k의 값을 계산합니다. k의 값을 구한 다음 $1 \triangle 2$의 값을 구합니다. $1 \triangle 2 = a$라고 합시다.

$(1 \triangle 2) * 3 = a * 3$이 되는데 《 $*$ 》의 정의에 의하여 $a *$

$3 = ma + 3n$이 됩니다. m, n을 구하여야 $a * 3$의 값이 결정됩니다. 그러므로 $(1\triangle 2) * 3$을 계산하자면 먼저 k, m, n의 값을 구해야 합니다. $1 * 2 = 5$로부터 m, n의 값을 구할수 있고 $(2 * 4)\triangle 4 = 64$에서 k의 값을 구할수 있습니다.

풀기 $1 * 2 = m \times 1 + n \times 2 = m + 2n$이므로 $m + 2n = 5$입니다. 또한 m, n은 자연수이므로

$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}, \begin{cases} m = 2 \\ n = \dfrac{3}{2} \end{cases} \text{(버립니다.)}, \begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases},$$

이 됩니다.

① $m = 1, n = 2$일 때

$$(2 * 3)\triangle 4 = (1 \times 2 + 2 \times 3)\ \triangle 4 = 8\triangle 4$$
$$= k \times 8 \times 4 = 32k$$

$32k = 64$이므로 $k = 2$입니다.

② $m = 3, n = 1$일 때

$$(2 * 3)\triangle 4 = (3 \times 2 + 1 \times 3)\ \triangle 4 = 9\triangle 4$$
$$= k \times 9 \times 4 = 36k$$

$36k = 64$이므로 $k = 1\frac{7}{9}$이 얻어지는데 이것은 k가 자연수라는데 모순됩니다.

그러므로 $m = 3,\ n = 1,\ k = 1\frac{7}{9}$은 버려야 합니다.

그러므로 $m = 1,\ n = 2,\ k = 2$을 취합니다.

$$(1\triangle 2) * 3 = (2 \times 1 \times 2) * 3 = 4 * 3$$
$$= 1 \times 4 + 2 \times 3 = 10$$

이 됩니다.

[설명] 새로 정의된 연산과 관계되는 문제를 풀 때 새 연산의 정의에 철저히 의거하여야 하며 계산할 때 규정된 법칙에 따라 수를 갈아넣어야 합니다. 새 연산의 정의를 써서 계산할 때 더하기, 곱하기가 만족시켜야 할 연산규칙이 성립하지 않을수 있다는데 주의하여야 합니다.

련습 12

1. $*$는 $x*y=(x+y)\div 4$로 정의되였습니다. 다음 식을 계산하십시오.

   ① $13*17$　② $2*(3*5)$　③ $2*3*5$

   ④ 만일 $a*16=10$이면 a는 얼마입니까?

2. $*$은 $a*b=5a+6b$로 정의되였습니다. $3*x=x*3$이면 x는 얼마입니까?

3. $\odot$은 $x\odot y=a\times x+y$로 정의되였습니다. $(2\odot 3)\odot 4=$ $=2\odot(3\odot 4)$이면 a는 얼마입니까?

4. $\ominus$는 $a\ominus b=\dfrac{a+1}{b}$로 정의되였습니다.

   ① $2\ominus(3\ominus 4)$의 값을 구하십시오.

   ② $x\ominus 4=1.35$이면 x는 얼마입니까?

5. 연산부호 $\circ$에 대하여 다음의 산수식이 성립합니다.

$$\frac{1}{2}\circ\frac{2}{3}=\frac{3}{6},\quad \frac{4}{5}\circ\frac{7}{9}=\frac{11}{45},\quad \frac{5}{6}\circ\frac{1}{7}=\frac{6}{42}$$

   이때 $\dfrac{3}{11}\circ\dfrac{4}{5}$의 값을 구하십시오.

6. 두 연산 $\oplus, \otimes$는 임의의 두 옹근수 a, b에 대하여 $a\oplus \mathrm{b}=a+b-1,\quad a*b=a\times b-1$로 정의되였습니다.

   ① $4\otimes[(6\oplus 8)\oplus(3\oplus 5)]$의 값을 구하십시오.

   ② $x\oplus(x\oplus 4)=30$이면 x의 값은 얼마입니까?

7. 임의의 두 옹근수 x, y에 대하여 새 연산 $\triangle$를 $x\Delta y=\dfrac{6\times x\times y}{m\times x+2xy}$ (여기서 m은 결정된 옹근수)로 정의되였습니다. $1\triangle 2=2$일 때 $2\triangle 9$의 값을 구하십시오.

8. 임의의 수 a, b에 대하여 새 연산 ∇를 $a\nabla b=(a+1)\times(1-b)$로 정의하였습니다. 만일 같기식 $(a\nabla a)\nabla(a+1)=$ $=(a+1)\nabla(a\nabla a)$가 성립하자면 a의 값은 얼마여야 하겠습니까?

9. *은 $x*y=\frac{1}{xy}+\frac{1}{(x+1)(y+A)}$로 정의되였습니다.

$2*1=\frac{1}{2\times1}+\frac{2}{(2+1)(1+A)}=\frac{2}{3}$일 때 $1998*1999$의 값을 구하십시오.

10. $a※b=\frac{a+b}{a\div b}$입니다. $x※(5※1)=6$이면 x의 값은 얼마이겠습니까?

답

1. ① 7.5, ② 1, ③ 1.5625, ④ 24 2. 3 3. 0.1 4. ① 3, ② x는 4.4입니다. 5. $\frac{7}{55}$ 6. ① 75, ② x는 6.4입니다.
7. $4\frac{10}{11}$ 8. 0 9. $\frac{1}{1998000}$ 10. 0.3

제13절. 배길문제

배길문제도 거리문제로서 거리, 속도, 시간사이의 수량관계입니다. 배길문제는 일반거리문제보다 물흐름속도라는 수량이 더 많습니다. 흐르지 않는 물에서 배가 단위시간동안에 간 거리를 배의 속도라고 부릅니다. 물이 단위시간동안에 흘러간 거리를 물흐름속도라고 부릅니다.

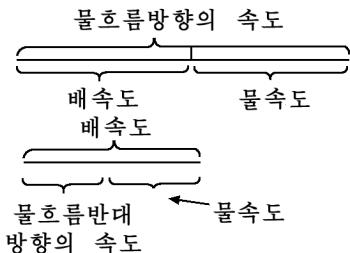



그림 13－1

그림 13－1에 속도관계

를 보여주었습니다.

물흐름방향을 따라갈 때 배의 속도= 배의 속도+물흐름속도

물흐름반대방향을 따라갈 때 배의 속도=배의 속도－물흐름속도

(물흐름방향으로 갈 때 배의 속도+물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도)÷2= 배의 속도

(물흐름방향으로 갈 때 배의 속도－물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도)÷2= 물흐름속도

실례 1. 부두 A, B사이의 거리는 208km입니다. 한척의 배가 A에서 출발하여 B까지 가는데 물흐름방향으로 가면 8시간 걸리고 B에서 A로 돌아오는데는 13시간이 걸립니다. 흐르지 않는 물에서 배의 속도와 물흐름속도를 구하십시오.

따져보기와 풀기

문제의 조건에 의하여 배의 속도와 물흐름속도를 계산하려면 물흐름방향으로 갈 때 배의 속도와 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도를 구하여야 합니다.

거리÷물흐름방향으로 갈 때 걸리는 시간 = 물흐름방향으로 갈 때 배의 속도

거리÷물흐름반대방향으로 갈 때 걸리는 시간 = 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도

따라서 물흐름방향으로 갈 때 배의 속도는

$$208 \div 8 = 26 \text{ (km/h)}$$

물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도는

$$208 \div 13 = 16 \text{ (km/h)}$$

물흐름속도는 $(26-16)\div 2 = 5$ (km/h)

답 흐르지 않는 물에서 배는 한시간동안에 21km 가고 물은 한시간동안에 5km 흐릅니다.

실례 2. 큰 강이 있는데 강한가운데서의 물흐름속도는 8km/h이고 강기슭에서의 물흐름속도는 6km/h 입니다. 한척의 배가 강한가운데서 (물흐름방향을 따라) 13시간동

안에 520km 갔습니다. 이 배가 강기슭을 따라 본래의 위치에 돌아오려면 몇시간 걸리겠습니까?

따져보기와 풀기

이 문제에서 구하려고 하는것은 이 배가 강기슭을 따라 본래 위치에 돌아오는데 몇시간이 걸리겠는가 하는것입니다. 돌아올 때는 물흐름방향과 반대방향으로 가야 합니다. 그리고 총 거리는 520km 입니다. 먼저 물흐름반대방향으로 갈 때의 속도를 구해야 합니다. 이때 걸리는 시간을 구할수 있습니다.

강한가운데서 물흐름방향으로 갈 때 배의 속도는

$$520 \div 13 = 40 \text{ (km/h)}$$

배의 속도는 $40-8=32$ (km/h)

강기슭에서 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도는

$$32-6=26 \text{ (km/h)}.$$

강기슭을 따라 본래 위치에 돌아오는데 걸리는 시간

$$520 \div 26=20 \text{ (시간)}$$

종합하면

$$520 \div (520 \div 13-8-6)$$
$$=520 \div (40-8-6)$$
$$=520 \div 26=20 \text{ (시간)}$$

답 이 배가 강기슭을 따라 본래 위치로 돌아오는데 걸리는 시간은 20시간입니다.

실례 3. 한척의 배가 물흐름방향을 따라 48km를 가는데 4시간 걸렸고 물흐름반대방향으로 48km 가는데 6시간 걸렸습니다. 지금 배는 부두A에서 떠나 부두B로 가고있습니다. 두 부두사이의 거리는 72km 입니다. 배가 떠날 때 한 손님이 창문으로 한개의 나무판자를 강에 던졌습니다. 배가 B에 도착하였을 때 나무판자와 부두B까지의 거리는 몇 km 였겠습니까? (배는 물흐름방향을 따라갑니다.)

따져보기와 풀기

나무판자가 흘러가는 속도는 물흐름속도입니다. 그러

므로 이 문제에서는 먼저 물흐름속도를 구하고 다시 배가 A부터 B까지 가는데 걸리는 시간에 의하여 나무판자가 물흐름방향을 따라간 거리를 구할수 있습니다.

물흐름방향으로 갈 때 배의 속도는

$$48 \div 4 = 12\ (\mathrm{km/h})$$

물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도는

$$48 \div 6 = 8\ (\mathrm{km/h})$$

물흐름속도는 $(12-8) \div 2 = 2(\mathrm{km/h})$

배가 A부터 B까지 가는데 걸리는 시간은

$$72 \div 12 = 6\ (\text{시간})$$

나무판자가 물흐름방향을 따라 흘러간 거리는

$$2 \times 6 = 12\ (\mathrm{km})$$

나무판자와 부두B까지의 거리는 $72-12 = 60\ (\mathrm{km})$

답. 배가 부두B에 도착하였을 때 나무판자로부터 부두B까지의 거리는 60km입니다.

실례 4. 두 부두 A, B사이의 거리는 48km이고 배가 물흐름방향을 따라갈 때는 3시간이 걸렸습니다. 돌아올 때는 비가 많이 내렸기때문에 8시간이 걸려서야 A에 돌아왔습니다. 개인날에는 물흐름속도가 4km/h입니다. 비가 내린 다음 물흐름속도가 얼마나 더 빨라졌겠습니까?

따져보기와 풀기

개인날 물흐름방향으로 갈 때 배의 속도는

$$48 \div 3 = 16\ \mathrm{km/h}$$

입니다.

배의 속도는 $16-4 = 12\ (\mathrm{km/h})$

비가 내린 다음 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도는

$$48 \div 8 = 6\ (\mathrm{km/h}).$$

비가 내린 다음 물흐름속도는 $12-6 = 6\ (\mathrm{km/h})$입니다.

비가 내린 다음 물흐름속도는 $6-4 = 2\ (\mathrm{km/h})$만큼 빨라졌습니다.

종합하면. $[(48\div3-4)-(48\div8)]-4$

$$= [(16-4)-6]-4= 6-4$$
$$= 2\ (km/h)$$

답. 비가 내린 다음 물흐름속도는 2 km/h 빨라졌습니다.

실례 5. 흐르지 않는 물에서 두 배 A, B는 한시간동안에 22km, 18km 갑니다. 두 배는 부두로부터 물흐름방향을 따라 서로 다른 시간에 출발합니다. B는 A보다 2시간 먼저 출발하였습니다. 만일 물이 한시간동안에 4km 흐른다면 A가 출발후 몇시간이면 B를 따라잡을수 있겠습니까?

따져보기와 풀기

A가 B를 따라잡는데 걸리는 시간을 구하기 위해서는 다음과 같은 두가지 조건을 알아야 합니다. 먼저 A와 B사이 거리가 얼마인가를 구해야 합니다. 즉 A가 출발할 때 B는 몇km갔는가를 알아야 합니다. 이 조건을 구할 때 물흐름속도를 생각하여야 합니다. 다음 두 배사이의 속도차입니다. 이것은 A가 B보다 한시간동안에 몇km씩 더 가는가를 계산하면 됩니다.

$$(18+4)\times2\div[(22+4)-(18+4)]= 44\div4= 11\ (\text{시간})$$

답. A가 출발한때로부터 11시간이 지나면 B를 따라잡을수 있습니다.

실례 6. 고기잡이배는 처음 물흐름방향을 따라 42km 간 다음 물흐름반대방향을 따라 8km갔는데 모두 11시간이 걸렸습니다. 다음 같은 시간동안에 물흐름방향을 따라 24km가고 물흐름반대방향으로 14km 갔습니다. 흐르지 않는 물에서 고기잡이배의 속도와 물흐름속도를 구하십시오.

따져보기와 풀기

고기잡이배의 속도와 물흐름속도를 계산하려면 먼저 물흐름방향으로 갈 때 배의 속도와 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도를 알아야 합니다.

물흐름방향으로 갈 때 배의 속도는 물흐름반대방향으

로 갈 때 배의 속도의

$$(42-24)\div(14-8)=18\div6=3 \text{ (배)}$$

입니다.

처음 물흐름방향을 따라 배가 갔다고 가정합시다.

물흐름방향으로 갈 때 배의 속도는

$$(42+8\times3)\div11= 66\div11= 6 \text{ (km/h)}$$

물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도는

$$8\div(11-42\div6)= 8\div4= 2 \text{ (km/h)}$$

배의 속도는 $(6+2)\div2 = 4$ (km/h)

물흐름속도는 $(6-2)\div2 = 2$ (km/h)

답. 흐르지 않는 물에서 배의 속도는 4km/h 이고 물흐름속도는 2 km/h 입니다.

실례 7. 두 지점사이의 거리가 231km입니다. 배가 물흐름방향을 따라 이 구간을 가는데 11시간이 걸리며 물흐름반대방향으로 갈 때는 물흐름방향으로 갈 때보다 한시간동안에 10km씩 적게 갑니다. 배가 이 구간을 물흐름반대방향으로 가는데 물흐름반대방향으로 갈 때보다 몇시간이 더 걸리겠습니까?

따져보기와 풀기

물흐름반대방향으로 갈 때 물흐름방향으로 갈 때보다 몇시간이 더 걸리겠는가를 구해야 합니다. 문제의 조건에 의하여 물흐름반대방향으로 갈 때 걸리는 시간을 구해야 합니다. 이것을 알자면 먼저 물흐름반대방향으로 갈 때 물흐름속도를 알아야 합니다. 이것은 《물흐름반대방향으로 갈 때 물흐름방향으로 갈 때보다 한시간동안에 10km씩 적게 갑니다.》에 의하여 구할수 있습니다. 즉 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도를 구할수 있습니다.

물흐름방향으로 갈 때 배의 속도는 $231\div11 = 21$ (km/h)

물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도는 $21-10 = 11$ (km/h)

물흐름반대방향으로 가는데 물흐름방향으로 갈 때보다 더 걸리는 시간은

$$231 \div 11 - 11 = 21 - 11 = 10\ (\text{시간})$$

입니다.

답. 물흐름반대방향으로 갈 때 10시간이 더 걸립니다.

실례 8. 한척의 배가 처음 물흐름방향을 따라 56km 가고 물흐름반대방향을 따라 20km 가는데 모두 12시간이 걸렸습니다. 두번째는 같은 시간동안에 물흐름방향을 따라 40km를 가고 물흐름반대방향으로 28km를 갔습니다. 흐르지 않는 물에서의 배의 속도와 물흐름속도를 구하십시오.

따져보기 이 배의 속도와 물흐름속도를 구해야 하므로 먼저 물흐름방향을 따라갈 때 배의 속도와 물흐름반대방향의 속도를 알아야 합니다.

주어진 조건에 의하여 처음 갈 때와 그다음 갈 때의 거리차를 알수 있고 물흐름방향으로 갈 때 배의 속도가 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도의 몇배인가를 구할수 있습니다. 다음 처음 갈 때 걸린 12시간이 모두 물흐름방향 또는 물흐름반대방향으로 가는데 걸린 시간으로 가정합니다. 물흐름방향으로 갈 때 배의 속도가 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도의 몇배인가를 리용하여 물흐름방향 또는 물흐름반대방향으로 12시간 갔을 때의 거리를 계산하고 다시 거리와 시간사이의 관계를 리용하여 각각 물흐름방향에서의 배의 속도와 물흐름반대방향에서의 배의 속도를 계산합니다. 이로부터 흐르지 않는 물에서의 배의 속도와 물흐름속도를 구합니다.

또한 두번째로 갈 때 모두 물흐름방향 또는 물흐름반대방향으로 간다고 가정하고 우와 같은 방법으로 계산할수도 있습니다.

풀기 1: 물흐름방향을 따라갈 때 배의 속도는 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도의 몇배이겠습니까?

$$(56-40)\div(28-20)=16\div8=2\ (\text{배})$$

처음에 모두 물흐름방향을 따라갔다고 가정합니다.

물흐름방향을 따라갈 때 배의 속도는

$$(56+20\times2)\div12=96\div12=8\ (\text{km/h})$$

입니다.

물흐름반대방향을 따라갈 때 배의 속도는

$$20\div(12-56\div8)=20\div5=4\ (\text{km/h})$$

입니다.

배의 속도는 $(8+4)\div2=6$ (km/h)

물흐름속도는 $8-6=2$ (km/h)

풀기 2: 물흐름방향을 따라갈 때 배의 속도는 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도의

$$(56-40)\div(28-20)=16\div8=2(\text{배})$$

입니다.

처음에 모두 물흐름반대방향으로 갔다고 가정하면 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도는

$$(56\div2+20)\div12=48\div12=4\ (\text{km/h})$$

입니다.

물흐름방향으로 갈 때 배의 속도는

$$56\div(12-20\div4)=56\div7=8\ (\text{km/h})$$

입니다.

배의 속도는 $(4+8)\div2=6$ (km/h)

물흐름속도는 $6-4=2$ (km/h)

생각하기 만일 두번째로 간것이 모두 물흐름방향을 따라 간것이라고 하면 답이 어떻게 되겠습니까?

풀기 3: 물흐름방향을 따라갈 때 배의 속도는 물흐름반대방향을 따라갈 때 배의 속도보다

$$(56-40)\div(28-20)=16\div8=2\ (\text{배})$$

빠릅니다.

처음 갈 때와 그다음에 간 24시간이 모두 물흐름방향을 따라갈 때라고 가정합시다.

물흐름방향을 따라갈 때 배의 속도는

$$[56+40+(20+28)\times 2]\div(12\times 2)$$
$$= 192\div 48= 8(\text{km/h})$$

입니다.

물흐름반대방향을 따라갈 때 배의 속도는

$$(28+20)\div[12\times 2-(56+40)\div 8]$$
$$=48\div(24-12)=48\div 12=4\ (\text{km/h})$$

입니다.

또는 $28\div(12-40\div 8)=28\div 7=4\ (\text{km/h})$

또는 $20\div(12-56\div 8)=20\div 5=4\ (\text{km/h})$

배의 속도는 $(8+4)\div 2 = 6$ (km/h)입니다.

물흐름속도는 $(8-4)\div 2 = 2$ (km/h)입니다.

답. 흐르지 않는 물에서 배의 속도는 6km/h 이고 물흐름속도는 2 km/h입니다.

실례 9. 유람선이 물흐름방향을 따라 한시간동안에 9km 내려가고 강흐름을 거슬러 한시간동안에 6km를 갑니다. 두 유람선이 같은 지점에서 동시에 출발하여 한척의 배는 물흐름방향을 따라 내려가다가 되돌아오며 다른 배는 강흐름을 거슬러 올라가다가 되돌아옵니다. 한시간후에 그것들은 동시에 출발지에 도착하였습니다 (배를 돌리는데 걸린 시간은 계산하지 않습니다). 두 유람선은 몇시간동안 같은 방향으로 갔으며 방향이 같아졌을 때 물흐름의 어느 방향으로 갔습니까?

따져보기 유람선이 물흐름방향으로 갈 때와 물흐름반대방향으로 갈 때의 속도비는 9∶6이고 거기에 소비되는 시간비는 6∶9입니다. 즉 두 유람선이 물흐름방향과 물흐름반대방향으로 갈 때의 시간비는 6∶9입니다. 두 유람선이 같은 방향으로 갈 때 걸리는 시간은 물흐름방향으로 갈 때 배의 속도와 물흐름반대방향으로 갈 때 배의 속도비의 방향바꾸기에 드는 시간차입니다.

풀기 두 유람선이 물흐름방향을 따라가는데 걸리는

시간은 각각

$$[60\div(6+9)]\times 6 = 4\times 6 = 24 \text{ (분)}$$

이고 물흐름반대방향으로 갈 때 걸리는 시간은 각각

$$[60\div(6+9)]\times 9 = 4\times 9 = 36 \text{ (분)}$$

또는 $60-24=36$ (분) 입니다.

두 유람선이 가는 방향이 같게 되는 시간은

$$36-24=12 \text{ (분)}$$

입니다.

답. 두 유람선은 12분동안 같은 방향으로 갔으며 방향이 같을 때 두 유람선은 모두 물흐름반대방향으로 갔습니다.

련습 13

1. 두 지점 A, B사이의 거리는 192km입니다. 한척의 배가 물흐름방향을 따라 A에서 B로 가는데 8시간이 걸립니다. 이 강의 물흐름속도는 4km/h입니다. B에서 A로 가려면 몇시간이 걸리겠습니까?

2. 두 지점사이의 거리는 432km입니다. 한척의 배가 물흐름방향을 따라 이 거리를 가는데 16시간이 걸리며 물흐름반대방향으로 갈 때는 물흐름방향으로 갈 때보다 한시간에 9km씩 적게 갑니다. 물흐름반대방향으로 갈 때 물흐름방향으로 갈 때보다 몇시간이 더 걸리겠습니까?

3. 강 A의 물흐름속도는 3km/h 이고 강 B의 물흐름속도는 2km/h입니다. 한척의 배가 A에서 물흐름방향을 따라 7시간동안에 133km가 B에 도착하였습니다. 그리고 B에서 물흐름반대방향으로 또 84km를 갔습니다. 이 배가 아직 몇시간을 더 가야 A에 도착하겠습니까?

4. 두 배 A, B가 각각 부두 ㄱ)에서부터 물흐름을 거슬러 올라갑니다. 흐르지 않는 물에서 배 A는 한시간동안에 15km를 가고 배 B는 한시간동안에 12km 갑니다. 물흐름속도는 3km/h 입니다. 배 B가 떠난지 2시간후에 배 A가

떠났습니다. 배 A가 배 B를 따라잡았을 때 부두 ㄱ)에서부터 몇km 떨어진곳에 있었겠습니까?

5. 길이가 80km인 강이 있는데 배 A가 물흐름방향을 따라 내려가는데 4시간이 걸리고 (부두까지 가는데) 물흐름반대방향을 따라 올라가는데 10시간이 걸립니다. 만일 배 B가 물흐름방향을 따라 내려가는데 5시간이 걸린다면 배 B가 물흐름반대방향을 따라 올라오는데 몇시간이 걸리겠습니까?

6. 강가운데 있는 지점 A로부터 부두까지의 거리는 60km 입니다. 만일 배가 물흐름방향을 따라 내려간다면 부두까지 4시간이 걸립니다. 물흐름속도는 6km/h 입니다. 돌아오는 도중 4시간후에 조수로 하여 바다로부터 강까지의 물흐름속도가 3 km/h로 되였습니다. 이 배가 본래 위치에 돌아오는데 몇시간이 걸리겠습니까?

답

1. 12시간 $192 \div (192 \div 8 - 4 - 4) = 12$ (시간)
2. 8시간 $432 \div (432 \div 16 - 9) - 16 = 8$ (시간)
3. 6시간 $133 \div 7 - 3 = 16$ (km/h)
   $84 \div (16 - 2) = 6$ (시간)
4. 72km
   $(15-3) \times \{(12-3) \times 2 \div [(15-3)-(12-3)]\} = 72$ (km)
5. 20시간
   $20 - [(80 \div 4) + (80 \div 10)] \div 2 = 6$ (km/h)
   $80 \div 5 - 6 \times 2 = 4$ (km/h)
   $80 \div 4 = 20$ (시간)
6. 4시간
   $60 - (60 \div 4 - 6 - 6) \times 4 = 48$ (km)
   $48 \div (9+3) = 4$ (시간)

제14절. 자리올림법

우리가 늘 쓰고있는 수자쓰기방법은 10진법입니다. 실례를 들면 19,954를 일만구천구백오십사라고 읽습니다. 어떤 한개 수를 10진법으로 표시할수 있을뿐아니라 기타 진법으로도 표시할수 있습니다. 실례를 들면 2진법, 5진법, 7진법, 8진법, 12진법, 60진법 등 서로 다른 자리올림법이 있습니다.

우리는 일상생활에서 새들의 날개 2개를 한쌍, 신발 2개를 한컬레 …등으로 부르는데 여기서 쓰는것은 2진법입니다. 12대의 연필을 한조, 12달을 1년이라고 부르는데 이것은 12진법입니다. 24시간을 하루라고 하고 60초는 1분이라고 부르는데 여기서 쓰는것은 24진법, 60진법입니다.

이밖에도 많은 실례를 들수 있습니다.

생활속에는 사물의 대부분 기본상태가 10진법으로 표시되는것이 아니라 흔히 두가지 상태로 표시됩니다. 실례를 들어 《전등이 켜진다.》와 《전등이 꺼진다.》, 《죽는것》과 《사는것》, 《거짓》과《진실》,《있는것》과 《없는것》 등 모두 두가지 상태로 됩니다. 이중의 하나를 《1》로 표시하고 다른 하나를 《0》으로 표시합니다. 《전등이 켜진다.》를 《1》로 《전등이 꺼진다.》를 《0》으로 표시한다면 두가지 수 《0, 1》만 쓰면 됩니다. 이것이 바로 2진수입니다. 특히 콤퓨터에서는 2진법이 쓰입니다.

1. 2진법이란 무엇입니까?

2진수는 두가지 특성을 가집니다. 다만 2개의 수 0과 1만을 가지고 《2가 되면 한자리 올라갑니다》의 법칙을 만족시킵니다. 2진법으로 쓴 수는 모두 0과 1로 표시합니다.

나머지 진수와 구별하기 위하여 부호 $(\quad)_2$로 표시합니다. 괄호안의 수는 2진수를 표시합니다. 실례를 들면 $(1101)_2$은 2진수 1101입니다. 꼭같이 부호 $(\quad)_{10}$은 괄호안

의 수가 10진수라는것을 의미합니다. 나머지 진수도 꼭같은 방법으로 표시할수 있습니다.

《2가 되면 한자리 올라갑니다》의 법칙을 리용하면 2진법에서의 10은 10진법에서의 2를 표시합니다. 2진법에서 100은 10진법에서의 4를 표시합니다. 10진법에서의 8은 2진법에서의 1000에 해당됩니다. 두가지 진법의 대비표를 만들면 다음과 같습니다(표 14－1).

표 14－1

10진법	2진법	10진법	2진법
1	1	9	1001
2 (2^1)	10	10	1010
3	11	11	1011
4(2^2)	100	12	1100
5	101	13	1101
6	110	14	1110
7	111	15	1111
8 (2^3)	1000	16 (2^4)	1000

10진수의 표시와 사용은 잘 알고있습니다. 어떤 수 1,998을 쓸 때 그것은 다음과 같이 표시됩니다.

$$1,998 = 1\times1,000 + 9\times100 + 9\times10 + 8\times1$$

즉 1,998에는 한개의 1,000, 9개의 100, 9개의 10, 8개의 1이 있습니다.

한개의 2진수에 대해서도 수가 있는 위치에 따라 그 값을 결정할수 있습니다. 실례를 들어 $(1011)_2$에서 3개의 1이 있는 위치가 다르면 그것들이 대신하는 수값도 다릅니다.

$$(1011)_2 = 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$$

여기서 $2^0 = 1$입니다.

즉 어떤 2진수에서 오른쪽에 있는 첫번째 자리로부터 시작하여 차례로 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots$입니다.

일반적으로 임의의 2진수는 모두 매 자리에 있는 수와 수가 놓여있는 자리우의 수 세기단위를 곱한 적의 합으로 표시됩니다. 실례를 들면

$$(110101)_2 = 1\times2^5 + 1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$$

입니다.

2. 2진법의 계산

10진법의 덕셈과 마찬가지로 2진수에서도 덕셈을 할수 있습니다. 2진수의 덕셈은 10진수의 덕셈과 기본적으로 같습니다. 계산이 보다 간단할뿐입니다. 10진법의 계산법칙은 《10이 되면 한자리 올라갑니다》라면 2진법에서는 《2가 되면 한자리 올라갑니다》는것이 기본규칙입니다. 2진법에서는 수 0과 1만을 가지고 계산을 진행합니다.

이제 2진법에서 한자리수의 더하기와 곱하기법칙을 봅시다.

더하기법칙

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=10$$

곱하기법칙

$$0\times0=0,\ 0\times1=0,\ 1\times0=0,\ 1\times1=1$$

2진법계산은 10진법보다 수량이 적을뿐아니라 복잡성의 견지에서 볼 때 매우 간단합니다.

2진법의 덕셈에서 더하기는 바꿈법칙과 묶음법칙을 만족시키며 곱하기도 바꿈법칙과 묶음법칙 및 곱하기의 더하기에 대한 분배법칙도 만족시킵니다. 2진법의 덜기와 나누기는 각각 더하기와 곱하기의 거꿀계산이며 구체적으로 보면 10진법과 같이 할수 있습니다. 거꿀계산을 리용하여 계산결과의 정확성을 알아볼수 있습니다.

이제 2진법의 덕셈을 고찰합시다.

실례 1. 다음식을 계산하십시오.

① $(1011)_2+(1111)_2$

② $(1100)_2+(110)_2+(111)_2$

풀기 ①

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1 \\ +)\ \ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

즉 $(1011)_2+(1111)_2=(11010)_2$

②

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & 0 \\
+) & & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

즉 $(1100)_2+(110)_2+(111)_2=(11001)_2$

[설명] 2진법의 더하기에서 $(1)_2+(11)_2$이면 본래 자리에 0을 쓰고 1이 한자리 올라갑니다. 만일 $(1)_2+(1)_2+(1)_2$이면 본래 자리에 1을 쓰고 1이 한자리 올라갑니다.

실례 2. $(11110010)_2-(1111011)_2$을 계산하십시오.

풀기

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-) & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

즉 $(11110010)_2-(1111011)_2=(1110111)_2$

실례 3. $(11010)_2\times(1011)_2$을 계산하십시오.

풀기

$$
\begin{array}{rccccccccc}
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\times) & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

즉 $(11010)_2\times(1011)_2=(100011110)_2$

10진법의 나누기와 마찬가지로 2진법의 나누기도 다음과 같은 관계식을 만족시킵니다.

나누일수 = 나누는수×상 + 나머지

나머지는 령이 될수도 있고 령이 아닐수도 있습니다.

실례 4. 다음식을 계산하십시오.

① $(1000001)_2 \div (1101)_2$

② $(100010)_2 \div (1001)_2$

풀기

①

```
            101
1101  ) 1000001
        1101
        -------
          1101
          1101
          -------
             0
```

즉 $(1000001)_2 \div (1101)_2 = (101)_2$

②

```
            11
1001  ) 100010
        1001
        -------
        10000
         1001
        -------
          111
```

즉 $(100010)_2 \div (1001)_2 = (11)_2 \cdots (111)_2$

2진법의 계산순서 및 규칙은 10진법의 계산순서 및 규칙과 같습니다.

실례 5. $[(100101)_2 - (11100)_2] + (1001110)_2 \div (110)_2$을 계산하십시오.

```
     1 0 0 1 0 1
 - )   1 1 1 0 0
 ---------------
         1 0 0 1
```

```
          1101
110  ) 1001110
        110
       --------
         111
         110
       --------
           110
           110
       --------
             0
```

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 0\ 1 \\
+)\quad 1\ 1\ 0\ 1 \\
\hline
1\ 0\ 1\ 1\ 0
\end{array}
$$

즉 $[(100101)_2-(11100)_2]+(1001110)_2\div(110)_2$
$=(1001)_2+(1001110)_2\div(110)_2$
$=(1001)_2+(1101)_2$
$=(10110)_2$

3. 2진법을 10진법으로 고치기

같은 사물의 수량을 서로 다른 진법으로 표시할수 있고 서로 다른 진수사이에도 서로 련계되여있어 전환시킬수 있습니다. 앞에서 10진법과 2진법사이의 호상전환표를 주었습니다. 이제 복잡한 경우 어떻게 전환하겠는가를 생각합니다. 앞의 표로부터 다음과 같은 사실을 알수 있습니다.

$(1)_2=(1)_{10}$, $(10)_2=(2)_{10}$, $(100)_2=(4)_{10}$, $(1000)_2=(8)_{10}$, $(10000)_2=(16)_{10}$,…

2진수에서 오른쪽 첫자리부터 시작하여 차례로 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, …입니다. 이것을 밝혀보면

$2^0=1$ (2^0을 1로 적습니다.)

$2^1=2$ (2^1은 1개의 2)

$2^2=2\times2=4$ (2^2은 2개의 2를 곱한것)

$2^3=2\times2\times2=8$ (2^3은 3개의 2를 곱한것)

$2^4=2\times2\times2\times2=16$ (2^4은 4개의 2를 곱한것)

$2^5=2\times2\times2\times2\times2=32$ (2^5은 5개의 2를 곱한것)

$2^6=2\times2\times2\times2\times2\times2=64$ (2^6은6개의 2를 곱한것)

…

입니다.

수학에서 이것을 2의 령제곱, 2의 1제곱, 2의 2제곱, 2의 3제곱, 2의 4제곱, 2의 5제곱, 2의 6제곱,…등으로 부릅니다.

이렇게 하여 2진법을 10진법으로 고칠수 있고 10진법을 2진법으로 고칠수 있습니다.

실례로

$(111001)_2 = (1\times100000 + 1\times10000 + 1\times1000 + 0\times100 +$
$+0\times10 + 1\times1)_2$
$= (1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0)_{10}$
$= (32+16+8+0+0+1)_{10} = (57)_{10}$

실례 6. 다음의 2진수를 10진수로 고치십시오.

① $(10011)_2$　　② $(101010)_2$

③ $(10001101)_2$　　④ $(110100111)_2$

풀기 ① $(10011)_2 = (1\times10000 + 0\times1000 + 0\times100 +$
$+1\times10 + 1\times1)_2$
$= (1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0)_{10}$
$= (16+2+1)_{10} = (19)_{10}$

② $(101010)_2 = (1\times100000 + 0\times10000 + 1\times1000 + 0\times100 +$
$+1\times10 + 0\times1)_2$
$= (1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0)_{10}$
$= (32 + 8 + 2)_{10} = (42)_{10}$

③ $(10001101)_2 = (1\times2^7 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^0)_{10}$
$= (128 + 8 + 4 + 1)_{10} = (141)_{10}$

④ $(110100111)_2 = (1\times2^8 + 1\times2^7 + 1\times2^5 + 1\times2^2 + 1\times2^1 +$
$+1\times2^0)_{10}$
$= (256 + 128 + 32 + 4 + 2 + 1)_{10} = (423)_{10}$

4. 10진수를 2진수로 고치기

(1) 수분해법

실례 7. $(42)_{10}$을 2진수로 고치십시오.

따져보기 이 문제는 앞에서 본 실례의 2번입니다. 2진수를 10진법으로 고치는 거꿀과정입니다.

풀기 $(42)_{10} = (32 + 8 + 2)_{10} = (1\times2^5 + 1\times2^3 + 1\times2^1)_{10}$
$= (1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0)_{10}$
$= (1\times100000 + 0\times10000 + 1\times1000 + 0\times100 +$
$1\times10 + 0\times1)_2$
$= (101010)_2$

따라서 $(42)_{10} = (101010)_2$

이로부터 10진수를 2진수로 고치려면 먼저 10진수를 2의 제곱수로 고쳐야 합니다. 제곱수를 어깨수차례로 쓰고 결수들로 같기식이 성립되게 합니다. 어깨수가 큰쪽에서부터 차례로 결수들을 쓰면 2진수가 됩니다.

실례 8. 다음 10진수를 2진수로 고치십시오.

① $(61)_{10}$

② $(108)_{10}$

따져보기 ① $(61)_{10}$은 $64=2^6$이 되지 않습니다. 그러므로 2진수의 제일 높은 자리는 $32=2^5$ 즉 $61=32+29$이고 나머지 29는 $16=2^4$을 넘습니다. $29=16+13$이고 13은 $8=2^3$을 넘습니다. 따라서 $13=8+5$이고 $5=4+1$입니다. 즉 $61=32+16+8+$ $+4+0\times2+1$입니다.

$$(61)_{10}=(32+16+8+4+0\times2+1)_{10}$$
$$=(1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+2^0)_{10}$$
$$=(111101)_2$$

즉 $(61)_{10}=(111101)_2$

② $(108)_{10}$은 $128=2^7$이 되지 않습니다. 그러므로 2진수의 제일 높은 자리는 $64=2^6$ 즉 $108=64+44$입니다. 44는 $32=2^5$이 넘습니다. 따라서 $108=64+32+12$이고 12는 $16=2^4$이 되지 않으므로 2진수의 자리는 한자리가 비게 됩니다. 그런데 12는 8보다 크므로 1개의 $8=2^3$을 포함합니다. $108=64+$ $+32+8+4$이고 $4=2^2$입니다.

$$(108)_{10}=(64+32+8+4)_{10}$$
$$=(1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0)_{10}$$
$$=(1101100)_2$$

즉 $(108)_{10}=(1101100)_2$

(2) 2로 나눈 나머지 취하기법

2로 나눈 나머지 취하기법은 짧은 나누기를 취하는 방법으로서 2로 10진수를 계속 나누었을 때 생기는 나머지수로 2진수를 만드는 방법입니다.

실례 9. 다음의 10진수를 2진수로 고치십시오.

① $(89)_{10}$ ② $(219)_{10}$

풀기 ①

2	89		
2	44	…	1
2	22	…	0
2	11	…	0
2	5	…	1
2	2	…	1
2	1	…	0
	0	…	1

따라서 $(89)_{10}=(1011001)_2$

②

2	219		
2	109	…	1
2	54	…	1
2	27	…	0
2	13	…	1
2	6	…	1
2	3	…	0
2	1	…	1
	0	…	1

따라서 $(219)_{10}=(11011011)_2$

이상의 실례들을 통하여 마지막 한걸음은 1÷2로서 상은 0이고 나머지는 1이라는것을 알수 있습니다.

실례 10. 두가지 방법을 써서 $(153)_{10}$을 2진수로 고치십시오.

풀기 (방법1)

$$(153)_{10}=(128+25)_{10}=(128+16+9)_{10}=(128+16+8+1)_{10}$$
$$=(1\times2^7+0\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+$$
$$+0\times2^1+1\times2^0)_{10}$$
$$=(10011001)_2$$

(방법 2)

$$\begin{array}{r|l l l}
2 & \underline{\ 153\ } & \cdots & \\
2 & \underline{\ 76\ } & \cdots & 1 \\
2 & \underline{\ 38\ } & \cdots & 0 \\
2 & \underline{\ 19\ } & \cdots & 0 \\
2 & \underline{\ 9\ } & \cdots & 1 \\
2 & \underline{\ 4\ } & \cdots & 1 \\
2 & \underline{\ 2\ } & \cdots & 0 \\
2 & \underline{\ 1\ } & \cdots & 0 \\
 & \ 0 & \cdots & 1
\end{array} \uparrow$$

따라서 $(153)_{10}=(10011001)_2$

(3) 그밖의 진법들

3진법은 수 0, 1, 2를 쓰며 《3이 되면 한자리 올라갑니다.》는 규칙에 기초하고있습니다.

실례를 들면 $(2011)_3=(2\times3^3+0\times3^2+1\times3^1+1\times3^0)_{10}$입니다.

8진법은 수 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7을 쓰며 《8이 되면 한자리 올라갑니다.》는 규칙에 기초하고있습니다.

실례를 들면 $(1752)_8=(1\times8^3+7\times8^2+5\times8^1+2\times8^0)_{10}$입니다.

12진법은 수 0, 1, 2,⋯, 9와 A로 10, B로 11을 씁니다. 《12가 되면 한자리 올라갑니다.》의 규칙에 기초하고있습니다.

실례를 들면 $(258B3)_{12} = (2\times12^4+5\times12^3+8\times12^2+11\times12^1+3\times12^0)_{10}$입니다.

2진수와 마찬가지로 10진수가 아닌 수와 10진수사이에 서로 전환할수 있고 그 방법은 2진법을 10진법으로 고치는 방법 또는 10진법을 2진법으로 고치는 방법과 같습니다.

실례 11. 다음의 수들을 2진법으로 고치십시오.

① $(112)_3$ ② $(1076)_8$ ③ $(2B3)_{12}$

풀기 ① $(112)_3 = (1\times3^2+1\times3^1+2\times3^0)_{10}$

$= (9+3+2)_{10} = (14)_{10}$

따라서 $(112)_3 = (14)_{10}$

② $(1076)_8 = (1\times8^3+0\times8^2+7\times8^1+6\times8^0)_{10}$

$= (512+56+6)_{10} = (574)_{10}$

따라서 $(1076)_8 = (574)_{10}$

③ $(2B3)_{12} = (2\times12^2+11\times12^1+3\times12^0)_{10}$

$= (288+132+3)_{10} = (423)_{10}$

따라서 $(2B3)_{12} = (423)_{10}$

2진법에서와 마찬가지로 10진수를 10진수가 아닌 수로 고칠수 있습니다.

실례 12. 10진수 $(1095)_{10}$을 8진수와 3진수로 고치십시오.

풀기 $(1095)_{10}$을 8진수로 고치면

8	1095			
8	136	…	7	↑
8	17	…	0	
8	2	…	1	
	0	…	2	

따라서 $(1095)_{10} = (2107)_8$이 됩니다.

$(1095)_{10}$을 3진수로 고치면

3	1095			
3	365	…	0	↑
3	121	…	2	
3	40	…	1	
3	13	…	1	
3	4	…	1	
3	1	…	1	
	0	…	1	

따라서 $(1095)_{10}=(1111120)_3$이 됩니다.

실례 13. 8진수 $(541)_8$을 3진수로 고치십시오.

풀기 먼저 8진수 $(541)_8$을 10진수로 고칩니다..

$$(541)_8=(5\times8^2+4\times8^1+1\times8^0)_{10}$$
$$=(320+32+1)_{10}$$
$$=(353)_{10}$$

다시 10진수 $(353)_{10}$을 3진수로 고칩니다.

3	353		
3	117	…	2
3	39	…	0
3	13	…	0
3	4	…	1
3	1	…	1
	0	…	1

그러므로 $(541)_8=(353)_{10}=(111002)_3$

따라서 $(541)_8=(111002)_3$

련습 14

1. 2진법의 더하기를 계산하고 검산하십시오.
   ① $(11000)_2+(10001)_2$
   ② $(1001001)_2+(101110)_2$
2. 2진법의 덜기를 계산하고 검산하십시오.
   ① $(11000)_2-(10001)_2$
   ② $(1001001)_2-(10110)_2$
3. 2진법의 곱하기를 계산하고 검산하십시오.
   ① $(1001)_2\times(101)_2$
   ② $(1101)_2\times(110)_2$
4. 2진법의 나누기를 계산하고 검산하십시오.
   ① $(101101)_2\div(1001)_2$
   ② $(10110100)_2\div(101101)_2$

5. 다음의 문제를 계산하십시오.

① $[(1101001)_2 \div (101)_2 + (111)_2] \div (100)_2 + (11001)_2$

② $[(1011001)_2 - (10001)_2 \times (11)_2 + (111)_2] \times (11)_2$

③ $(10001101)_2 \div (1101)_2$

6. 다음의 2진수를 10진수로 고치십시오.

① $(10001)_2$ ② $(11000)_2$ ③ $(101110)_2$

④ $(111101)_2$ ⑤ $(1101001)_2$ ⑥ $(11011010)_2$

7. 다음의 10진수를 2진수로 고치십시오.

① 19 ② 26 ③ 54

④ 81 ⑤ 123 ⑥ 180

8. 다음의 수를 10진수로 고치십시오.

① $(201)_3$ ② $(1106)_8$ ③ $(1A2)_{12}$

9. 10진수 $(125)_{10}$를 8진수와 3진수의 합으로 고치십시오.

10. 2진수 $(11011011)_2$을 8진수로 고치십시오.

답

1. ① $(11000)_2 + (10001)_2 = (101001)_2$

② $(1001001)_2 + (101110)_2 = (1110111)_2$

2. ① $(11000)_2 - (10001)_2 = (111)_2$

② $(1001001)_2 - (10110)_2 = (110011)_2$

3. ① $(1001)_2 \times (101)_2 = (101101)_2$

② $(1101)_2 \times (110)_2 = (1001110)_2$

4. ① $(101101)_2 \div (1001)_2 = (101)_2$

② $(10110100)_2 \div (101101)_2 = (100)_2$

5. ① $[(1101001)_2 \div (101)_2 + (111)_2] \div (100)_2 + (11001)_2 = (100000)_2$

② $[(1011001)_2 - (10001)_2 \times (11)_2 + (111)_2] \times (11)_2 = (10000111)_2$

③ $(10001101)_2 \div (1101)_2 = (1010)_2 \cdots (1011)_2$

6. ① $(10001)_2=(17)_{10}$ ④ $(111101)_2=(61)_{10}$
② $(11000)_2=(24)_{10}$ ⑤ $(1101001)_2=(105)_{10}$
③ $(101110)_2=(46)_{10}$ ⑥ $(11011010)_2=(218)_{10}$

7. ① $(19)_{10}=(10011)_2$ ④ $(81)_{10}=(1010001)_2$
② $(26)_{10}=(11010)_2$ ⑤ $(123)_{10}=(1111011)_2$
③ $(54)_{10}=(110110)_2$ ⑥ $(180)_{10}=(10110100)_2$

8. ① $(201)_3=(2\times3^2+0\times3^1+1\times3^0)_{10}=(19)_{10}$
② $(1106)_8=(1\times8^3+1\times8^2+0\times8^1+6\times8^0)_{10}=(582)_{10}$
③ $(1A2)_{12}=(1\times12^2+A\times12^1+2\times12^0)_{12}=(266)_{10}$

9. $(125)_{10}=(175)_8$ $(125)_{10}=(11122)_3$

10. $(11011011)_2=(219)_{10}=(333)_8$

제15절. 더하기원리

1. 더하기원리

분단에서 등산경기를 진행합니다. 등산길은 그림 15－1과 같습니다. 이미전에 산에 올라가는 길을 선택할것을 요구한다면 분단위원장은 어느 길을 선택하여야 하겠습니까?

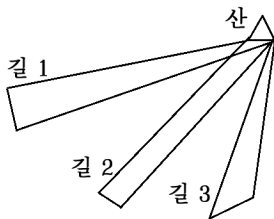



그림 15－1

여기서는 먼저 길1, 길2, 길3으로부터 산꼭대기까지 가는데 몇개의 길이 있는가만 봅시다.

길 1에서 출발한다면 2개의 길이 있고 길 2에서 출발해도 2개의 길이 있으며 길 3에서 출발하면 1개의 길이 있습니다. 모두 5개의 길이 있습니다. 이렇게 산꼭대기에 오르는 길을 세가지로 가른다면 매 갈래에서 갈수 있는 길을 센 다음 그것을 합치면 5개의 길이 있다는것을 알수

있습니다. 이것이 더하기원리입니다.

실례 1. 윤미가 여름방학때 아버지, 어머니와 함께 할머니집에 가느라고 려행을 떠났습니다. 그는 기차를 타고 며칠동안 가야 할 먼길이므로 30권의 화보와 17권의 교과서, 5권의 소설책을 가지고 떠났습니다. 그가 책을 선택하여 다 읽으려 한다면 몇가지 선택방법이 있겠습니까?

따져보기 책을 세가지로 분류합니다. 즉 첫번째는 화보, 두번째는 교과서, 세번째는 소설책입니다.

화보를 선택하는 방법은 30가지이고 교과서는 17가지, 소설책은 5가지이므로 임의로 선택하여 볼수 있는 방법은

$$30+17+5 = 52$$

가지 입니다.

답. 임의로 선택하여 볼수 있는 방법은 52가지입니다.

실례 2. 여름방학이 지난 다음 선생님은 리철에게 방학기간에 준 과제를 다 수행하였는가고 물었습니다. 리철은 수행하지 못하였다고 대답하였습니다. 선생님은 왜 수행하지 못하였는가고 물었습니다. 리철은 시간이 모자라서 못하였다고 대답하면서 시간을 다음과 같이 종합하였습니다.

방학은 50일간인데 모두 $24\times50=1200$시간 입니다.

그중에서 토요일과 일요일은 휴식일이므로 $24\times2\times7=336$시간입니다.

매일 저녁 9시부터 아침 7시까지 자는 시간은 $10\times50=500$시간입니다.

매일 점심시간에 하는 휴식은 1.5시간이므로 총 $1.5\times50=75$시간입니다.

매일 식사시간은 2시간이므로 총 $2\times50=100$시간입니다.

매일 동무들과 노는 시간은 2시간이므로 총 $2\times50=100$시간입니다.

매일 피아노를 치는 시간은 1.5시간이므로 총 $1.5\times50=75$시간입니다.

매일 어머니로부터 이야기를 듣는 시간은 0.5시간이므로 총 0.5×50=25시간 등 이 시간을 다 계산하면

336+500+75+100+100+75+25=1211 (시간)

입니다.

리철이 계산한 시간은 50일간의 총 시간보다 많아졌는데 어디서 계산이 틀렸겠습니까?

따져보기 리철의 계산은 틀렸습니다.

이제 리철이 계산한 두가지 조건을 봅시다.

토요일과 일요일은 휴식일이므로 모두 24×2×7=336시간입니다.

매일 저녁 9시부터 아침 7시까지 자는 시간은 10시간이므로 총 10×50=500시간입니다.

리철은 336+500을 함께 계산하였는데 사실은 일부 시간이 두번 계산되였습니다. 토요일과 일요일에 자는 시간이 336시간에서 계산되였고 500시간에서 또 한번 계산되였습니다. 이렇게 계산해야 할 대상이 두번 계산됨으로써 총 시간이 초과되였습니다.

리철이가 어디서 또 이와 같은 착오를 범하였겠는가를 다시 더 따져보십시오.

실례 3. □－○=△의 덜기산수식에서 쓰이는 수는 다만 한자리수뿐입니다. 몇가지 서로 다른 산수식을 만들수 있겠습니까?

따져보기 이런 산수식은 55개 있습니다. 답을 다 찾아보십시오.

어떤 학생들은 몇개의 산수식실례를 들면 9－9=0, 8－5=3, 0－0=0 등으로 쓸수 있는데 이런 식으로 정확히 다 찾는다는것도 매우 어려울것입니다.

이제 몇가지 형태로 갈라봅시다.

덜릴수의 최대수는 9입니다. 그러므로 9－○=△인 산수식을 몇개 만들수 있는가를 봅시다. 다음과 같은 10개의 식을 만들수 있습니다.

$9-9=0$, $9-8=1$, $9-7=2$, $9-6=3$, $9-5=4$, $9-4=5$, $9-3=6$, $9-2=7$, $9-1=8$, $9-0=9$

이 산수식의 규칙을 따져보면 이렇게 계산하는것이 편리하다는것을 알수 있습니다. 이런 방법으로 하나씩 따져봅시다.

덜릴수가 8인 산수식은 9개
덜릴수가 7인 산수식은 8개
덜릴수가 6인 산수식은 7개
덜릴수가 5인 산수식은 6개
덜릴수가 4인 산수식은 5개
덜릴수가 3인 산수식은 4개
덜릴수가 2인 산수식은 3개
덜릴수가 1인 산수식은 2개
덜릴수가 0인 산수식은 1개

입니다. 모두 $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55$개 산수식이 있습니다.

이 실례를 통하여 알수 있는바와 같이 덜릴수에 따라 10가지로 갈라서 계산하였습니다. 다음 매 부분의 합을 구하였습니다. 이와 같이 문제의 범위가 넓고 복잡한 문제를 풀 때 그것을 몇가지 형태로 가른 다음 그것을 더하는 방법으로 총합을 구하는 방법을 더하기원리라고 부릅니다.

실례 4. 직선우에 A, B, C, … 등 10개의 점이 있습니다. 이 10개의 점들에서 두점을 련결하여 만들수 있는 직선은 모두 몇개입니까? (그림 15−2)

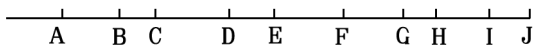



그림 15−2

따져보기 더하기원리를 써서 따져봅시다. 선분을 왼쪽 끝점으로부터 갈라서 계산합니다.

왼쪽 끝점이 A인 경우: 9개의 선분 AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, AJ가 얻어집니다.

왼쪽 끝점이 B인 경우: 8개의 선분 BC, BD, BE, BF, BG, BH, BI, BJ가 얻어집니다.

이와 같은 방법으로 하면

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45개$$

의 선분이 얻어집니다.

실례 5. 수 2를 쓴 종이 3개와 수 5를 쓴 종이 4개가 있습니다. 이 수들을 서로 더하여 몇개의 수를 만들수 있습니까?

따져보기 1: 수 2를 쓴 종이를 한개도 쓰지 않을 때, 1개 쓸 때, 2개 쓸 때, 3개 쓸 때로 갈라서 봅시다.

계산하기 쉽게 표를 만듭니다(표 15－1).

표 15－1

수 2를 쓴 종이 개수	수 5를 쓴 종이와 결합하였을 때의 수	갈래수
한개도 쓰지 않을 때	5, 10, 15, 20	4
1개	2, 7, 12, 17, 22	5
2개	4, 9, 14, 19, 24	5
3개	6, 11, 16, 21, 26	5

모두 4+5+5+5 =19개의 수를 만들수 있습니다.

따져보기 2: 제일 작은 수는 2이고 제일 큰 수는 $2\times 3+5\times 4=26$입니다.

수 2부터 시작하여 자연수순서대로 나가면서 수 2와 수 5가 결합되는가, 안되는가를 표시합니다 (표15－2).

표 15－2

수합	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
결합되는가?	0	×	0	0	0	0	×	0	0	0	0	×	
수합	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
결합되는가?	0	0	0	0	×	0	0	0	0	×	0	×	0

역시 19개의 수를 만들수 있습니다.

답. 19개의 수를 만들수 있습니다.

생각하기 이 두가지 방법의 좋은점과 나쁜점을 생각해보십시오.

실례 6. 두 사람 A, B가 탁구경기를 합니다. 어느 한쪽이 먼저 세번을 이기면 그가 곧 승리자로 됩니다.

① A가 마지막에 이겼다는것을 안다면 경기의 승부는 어떻게 되겠습니까? 몇가지 방법이 있겠습니까?

② 마지막에 누가 이기겠는지 모른다면 경기의 승부는 어떻게 되겠습니까?

따져보기 ① 이런 경기조건하에서 두 사람은 적어도 3번은 경기를 진행해야 하고 가장 많아서 5번은 경기를 진행해야 합니다. 경기진행회수에 따라 따져봅니다.

첫째: 경기회수가 3번인 경우

가장 간단한 경우로서 3번 다 A가 이깁니다.

둘째: 경기회수가 4번인 경우

B가 이김, A가 이김, A가 이김 , A가 이김

A가 이김, B가 이김, A가 이김, A가 이김

A가 이김, A가 이김, B가 이김, A가 이김

이렇게 3가지 경우가 있습니다.

셋째: 경기회수가 5번인 경우

B가 2번 이길수 있으므로 좀 복잡합니다. 그러나 한가지만은 명백합니다. 즉 5번째 경기는 A가 꼭 이깁니다. 이렇게 되면 네번째 경기까지는 두명이 각각 2번씩 이긴것입니다. 다음과 같이 표시합니다.

두 경기 지나서 이김: A가 이김, B가 이김, B가 이김, A가 이김

한 경기 지나서 이김: A가 이김, B가 이김, A가 이김, B가 이김; B가 이김, A가 이김, B가 이김, A가 이김의 두가지 경우가 있습니다.

두번씩 련속 이김: A가 이김, A가 이김, B가 이김, B가 이김; B가 이김, B가 이김, A가 이김, A가 이김;

B가 이김, A가 이김, A가 이김, B가 이김의 3가지 경우가 있습니다.

따라서 경기회수가 5번인 경우 모두 6가지가 있습니다.

세가지 경우를 합치면 1+3+6=10가지입니다.

② 물론 마지막경기에 누가 이기겠는가는 아직 모릅니다. 그러나 A가 이기겠는가, B가 이기겠는가에는 관계되지 않습니다. B가 마지막에 이기는 경우는 ①의 경우와 같습니다. 따라서 모두 10×2=20가지 방법이 있습니다.

답. A가 마지막에 이기는 경기의 승부를 가를수 있는 방법은 10가지, 마지막에 누가 이길지 모르는 경기의 승부를 가를수 있는 방법은 20가지입니다.

실례 7. 그림 15－3과 같이 한마리의 벌레가 점 A에서 출발하여 선분을 따라 점 B까지 기여갑니다. 임의의 점과 선분을 반복하여 지날수 없습니다. 이 벌레가 점 B까지 가는데 몇가지 길이 있겠습니까?

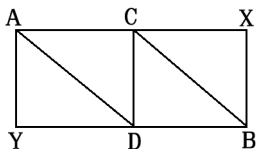



그림 15－3

따져보기 점 A에서 점 B까지 가는데 두가지 길 즉 한가지는 점 A에서 떠나서 점 C를 거쳐 점 B로 가는 길이고 다른 한가지는 점 A에서 떠나서 점 D를 거쳐 점 B에 가는것입니다. 이 두가지 길중에서 매 길마다 또 두가지 길이 있습니다.

점 C를 거쳐 점 B로 가는 길： ACB, ACXB

점 D를 거쳐 점 B로 가는 길： ADB, AYDB

점 C와 점 D를 다 거쳐 점 B까지 가는 길: ACDB, AYDCB, ADCXB, ADCB, AXDCXB

이렇게 하여 모두 9가지 길이 있습니다.

답. 모두 9가지 길이 있습니다.

련습 15

1. 수 1~9까지에서 매번 서로 다른 두개의 자연수를 더합니다. 합이 12이 되게 하는 방법이 몇가지 있겠습니까?

2. 어느 소학교 2학년에 4개 학급이 있는데 매 학급에 모범학생이 각각 3명, 4명, 2명, 4명 있습니다. 개학식때 이들중 한명을 결의토론시키려고 합니다. 몇가지 방법이 있습니까?

3. 어떤 천평에 1g, 2g, 4g, 8g짜리 분동이 각각 한개씩 있습니다. 이 분동을 리용하여 서로 다른 질량을 가진 몇가지 물건을 잴수 있습니까?

4. 여름방학때 윤미는 국어, 수학, 외국어숙제를 받았습니다. 매 과목숙제를 2일간이면 끝낼수 있습니다. 방학이 끝나기 한주일전에 련속 6일동안 숙제를 끝내려고 계획하였습니다. 매일 한과목씩만 하며 2일동안 같은 과목의 숙제를 하지 않습니다. 윤미가 숙제를 끝내려면 몇가지 선택방법이 있습니까?

5. 네자리수중에서 매 자리수들의 합이 4인 네자리수는 몇개있습니까?

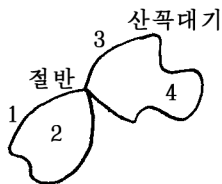
답

1. 18가지 2. 13가지 3. 15가지 4. 30가지 5. 20개

제16절. 곱하기원리

그림 16－1과 같은 산에 올라가는데 몇개의 길이 있는가를 생각해봅시다.

그림 16－1

출발점에서 떠나 산꼭대기까지 올라가는데 몇개의 길이 있습니까? 어떤 학생은 4개의 길이 있다고 쉽게 대답할것입니다. 사실 이 문제에는 여러가지 개수를 셀 때 늘 쓰는 방법의 하나인 곱하기원리가 작용합니다.

산꼭대기에 올라가는 길을 두 단계로 가를수 있습니다.

첫번째 단계는 출발점부터 절반지점까지 가는것이고 두번째 단계는 절반지점으로부터 산꼭대기까지 가는 길입니다. 첫번째 단계에는 두가지 방법이 있고 두번째 단계에도 두가지 방법이 있습니다. 그러므로 모두 $2\times2=4$가지 방법이 있습니다.

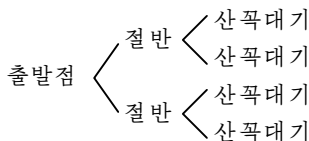



그림 16－2

그림 16－2에서 보는바와 같이 곱하기관계를 명백히 알수 있습니다.

실례 1. 윤호가 저고리 4벌, 바지 3벌, 신발 2컬레로 엇바꾸어 옷차림을 하려고 합니다. 몇가지 결합방법이 있겠습니까?

따져보기 한가지 옷차림을 준비하는데 세가지가 다 준비되여야 합니다. 즉 첫번째는 저고리의 선택, 두번째는 바지의 선택, 세번째는 신발의 선택입니다.

첫번째로 4가지 선택방법이 있는데 매 방법에 대하여

두번째 단계인 바지선택의 세가지 방법이 결합되여야 하므로 모두 4×3=12가지 방법이 있습니다.

이 12가지방법으로는 아직 옷차림을 완성하지 못한 상태입니다. 즉 세번째 단계인 신발이 선택되지 못하였습니다. 이 12가지 방법의 매 방법에 대하여 신발선택의 두가지 방법이 결합되여야 하므로 모두 12×2=24가지 방법이 있습니다.

답. 24가지 방법이 있습니다.

어떤 한가지 일을 완성하는데 몇가지 단계가 필요하며 매 단계를 완성하는데 몇가지 방법이 있다면 이 일을 완성하는데 필요한 방법의 가지수는 매 단계에서 선택할수 있는 방법의 가지수를 곱한 적과 같습니다.

실례 2. 수 1, 2, 3으로써 몇개의 세자리수를 만들수 있겠습니까?

따져보기 사실 이것은 □□□안에 수 1, 2, 3을 써넣는 문제입니다. 이제 몇가지 방법이 있는가를 봅시다.

□□□를 왼쪽으로부터 오른쪽으로 가면서 (세자리수로 생각한다면 높은 자리에서부터 낮은 자리로 가면서) 첫번째칸 , 두번째 칸, 세번째 칸이라고 부릅시다.

첫째 단계： 첫번째 칸에 써넣는데 3가지 방법이 있습니다.

둘째 단계：두번째 칸에 써넣는데 3가지 방법이 있습니다.

셋째 단계：세번째 칸에 써넣는데 3가지 방법이 있습니다.

이리하여 모두 3×3×3=27가지 방법이 있습니다.

다음과 같은 표를 만들어 따져봅시다(표 16－1).

표 16-1

첫번째칸	두번째칸	세번째칸	해당한 세자리수	첫번째칸	두번째칸	세번째칸	해당한 세자리수	첫번째칸	두번째칸	세번째칸	해당한 세자리수
1	1	1	111	2	1	1	211	3	1	1	311
		2	112			2	212			2	312
		3	113			3	213			3	313
	2	1	121		2	1	221		2	1	321
		2	122			2	222			2	322
		3	123			3	223			3	323
	3	1	131		3	1	231		3	1	331
		2	132			2	232			2	332
		3	133			3	233			3	333

답. 27가지 방법이 있습니다.

실례 3. 수 1, 2, 3을 가지고 반복이 없는 세자리수를 몇개 만들수 있습니까?

따져보기 실례 3과 실례 2는 비슷한 문제입니다. 그러나 명백히 서로 다른 요구가 있습니다. 실례를 들면 수 112는 문제의 요구를 만족시키지 못합니다.

첫째 단계: 첫번째 칸에 써넣는데 3가지 방법이 있습니다.

둘째 단계: 두번째 칸에 써넣는데 2가지 방법이 있습니다.

셋째 단계: 세번째 칸에 써넣는데 한가지 방법이 있습니다.

생각하기 왜 둘째 단계에서 2가지 방법, 셋째 단계에서 한가지 방법밖에 없는가를 생각해보십시오.

모두 3×2×1=6가지 방법이 있습니다.

표를 만들면 다음과 같습니다(표 16-2).

표 16-2

첫번째 칸	두번째 칸	세번째 칸	해당한 세자리수
1	2	3	123
	3	2	132
2	1	3	213
	3	1	231
3	1	2	312
	2	1	321

답. 모두 6가지 방법이 있습니다.

실례 4. 그림16－3과 같이 거리에 붉은색, 노란색, 푸른색의 신호등이 있는데 매 신호등은 서로 꺼졌다켜졌다합니다. 이 신호등이 서로 다른 몇가지 신호를 낼수 있겠습니까? (세 신호등이 다 켜지지 않는 경우는 있을수 없습니다).

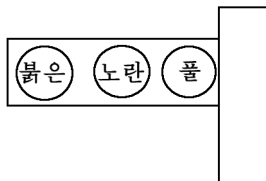



그림 16－3

따져보기 매 신호등은 모두 네가지 상태를 가집니다. 모두 2×2×2=8가지가 있습니다. 그중에는 세 신호등이 다 꺼지는 경우도 포함됩니다. 이 경우를 제외하면 8－1=7가지입니다.

답. 7가지의 신호를 보낼수 있습니다.

실례 5. 1~1,997까지의 자연수가운데서 몇개의 수가 수7을 포함하겠습니까?

따져보기 1: 두 단계로 갈라서 생각합니다. 첫째 단계는 1~999이고 둘째 단계는 1,000~1,997까지 입니다.

첫째 단계 : 먼저 1~99를 표로 만들면 다음과 같습니다.

표 16－3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
…									
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

이가운데서 19개 수가 수 7을 포함하고있으므로 100~199, 200~299, 300~399, 400~499, 500~599, 600~699, 800~899, 900~999는 각각 19개 수가 수 7을 포함하고있습

니다. 19×9=171개의 자연수가 수 7을 포함하고있습니다. 700~799의 100개수는 모두 수 7을 포함하고있습니다. 그러므로 1~999에는 수 7이 모두 171+100=271개 들어있습니다. 그리고 1000~1999에 들어있는 수 7도 모두 271개라는 것도 알수 있습니다.

그러므로 더하기원리에 의하여 모두 271+271=542개의 수에 수 7이 들어있습니다.

따져보기 2: 고찰하려는 수들을 네 부류로 가릅시다. 첫째 부류는 한자리수, 둘째 부류는 두자리수, 셋째 부류는 세자리수, 넷째 부류는 네자리수로 가릅니다.

첫째 부류: 한자리수에서 수 7을 포함하는것은 1개뿐입니다.

둘째 부류:두자리수를 두가지로 가를수 있습니다.

두자리수에서 수 7이 한개 들어있는것 즉 7□ 또는 □7인것은 모두 9+8=17개입니다.

두자리수에서 수 7이 두개 들어있는것 즉 77은 1개입니다. 따라서 두자리수에서는 17+1=18개의 수가 수 7을 포함합니다.

셋째 부류: 세자리수를 세가지로 가를수 있습니다.

세자리수에 한개의 수 7이 들어있는것 즉 7□□, □7□, □□7인것은 9×9+8×9+8×9=225개입니다.

세자리수에 두개의 수 7이 들어있는것 즉 77□, □77, 7□7인것은 9+9+8=26개입니다.

세자리수에 3개의 수 7이 들어있는것 즉 777한개입니다. 따라서 세자리수에서는 225+26+1=252개의 수가 수 7을 포함합니다.

넷째 부류: 네자리수를 세가지로 가를수 있습니다.

한개의 수 7이 있는것 즉 17□□, 1□7□, 1□□7인것은 9×9+9×9+9×9=243개입니다.

두개의 수 7이 있는것 즉 177□, 1□77, 17□7인것은 9+9+9=27개 입니다.

세개의 수 7이 있는것 즉 1,777 한개입니다.

그러므로 243+27+1=271개의 수가 수 7을 포함하고있습니다.

따라서 모두 1+18+252+271=542개의 수가 수 7을 포함하고있습니다.

따져보기 3: 생각하는 수를 모양이 □□□□인 수로 봅시다. 수 7이 들어있는 수를 생각합시다.

한개의 수 7이 있는 경우: □7□□, □□7□, □□□7은 모두 $2\times9\times9\times3=486$개 있습니다.

두개의 수 7이 있는 경우: □□77, □77□, □7□7은 모두 $2\times9\times3=54$개 있습니다.

세개의 수 7이 있는 경우: □777 모두 2개입니다.

모두 486+54+2=542개 있습니다.

답. 모두 542개 있습니다.

[설명] 모양이 □□□7인 수로는 $2\times9\times9$개 있는데 그중에는 0007, 0107, 0017 등이 들어있습니다. 그것들을 7, 107, 17로 보면 됩니다.

실례 5에서 서로 다른 방법을 써서 수를 계산하였는데 모두 더하기원리를 리용하였습니다. 그러나 매 방법들에서는 차이가 있습니다. 따져보기 1에서는 두가지 형태로 갈라서 어려운것을 쉬운것으로 넘겨서 풀었습니다. 따져보기 2에서는 곱하기원리를 써서 계산하였습니다. 따져보기 3은 기교성이 매우 높습니다. 수 7, 17 등도 네 자리수로 가정하였습니다. 이것은 계산을 보다 쉽고 빨리 하기 위해서입니다.

실례 6. 네 사람이 서로 공넘겨주기를 합니다. 첫사람이 공을 다른 사람에게 넘겨주어서 다섯번을 넘기면 공이 다시 첫사람에게 돌아옵니다. 공넘겨주기방법에는 몇가지 있겠습니까?

따져보기 공넘겨주기 과정을 생각한다면 매우 복잡하므로 그림을 그려보면서 생각합시다.

그림에 공을 넘겨주는 한가지 방법을 선분으로 표시하였습니다(그림 16－4).

① 첫번째와 네번째로 공을 받는 사람은 첫 사람 A일수 없습니다.

②선분을 련결할 때 자기가 자기에게 공을 넘길수 없으므로 한사람으로부터 나가는 선분수는 인원수보다 적어야 합니다.

그림 16－4

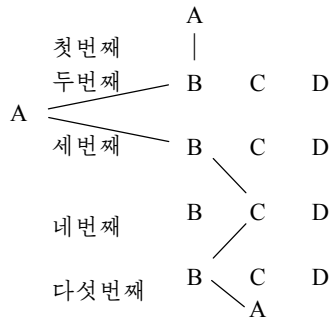
③ 네번째로 련결되는 선분인 경우 세번째로 공을 받은 사람의 영향을 받습니다. 세번째로 A가 공을 받았다면 그는 세 사람에게 공을 넘겨줄수 있고 만일 세번째로 A가 공을 받지 않았다면 두 사람에게만 넘겨줄수 있습니다.

그러므로 먼저 두 사람에게만 넘겨준다고 계산한 다음 마지막에 사람을 보충하면 세번째에 A가 받는 공의 방법수가 얻어집니다.

이렇게 하여 문제에서 요구하는 공넘겨주기문제를 다섯단계로 갈라볼수 있습니다. 곱하기원리에 의하여

$$3\times3\times3\times2\times1=54 \text{ 가지}$$

세번째에 A가 받는 공의 방법수는 $3\times2=6$ 가지입니다. 그러므로 모두 $54+6=60$ 가지입니다.

답. 60가지입니다.

련습 16

1. 어떤 학년에 4개의 학급이 있는데 매개 학급에 분단위원장과 학급장이 1명씩 있습니다. 이제 이 학년에서 야영소에 갈 대표를 선출하는데 매 학급에서 분단위원장이나 학급장들중에서 1명씩 뽑아야 합니다. 이

야영에 참가할 대표들을 구성하는데 몇가지 방법이 있겠습니까?

2. 두 학급 A, B에 각각 3명의 탁구선수가 있습니다. 두 학급사이에 복식경기를 진행한다면 서로 다른 몇가지 대전방안이 있겠습니까?

3. 수 0, 1, 2, 3으로써 몇개의 세자리 자연수를 만들수 있습니까? 매 자리에 있는 수가 서로 다른 몇개의 세자리 수를 만들수 있습니까?.

4. 120페지짜리 책이 있는데 매 페지에 페지수 1, 2,⋯, 119, 120을 써놓았습니다. 이 페지수들에 수 1이 몇번 나타나겠습니까?

5. 5명이 서로 공넘겨주기를 합니다. 먼저 A가 다른 사람에게 공을 넘겨줍니다. 4번을 넘겨준 다음 공이 A에게 돌아왔습니다. 공을 넘기는 방법에는 몇가지 있습니까?

답

1. 16가지 **2.** 9가지 **3.** 48개, 18개 **4.** 53번 나타납니다. **5.** 52가지

제17절. 겹친도형에서의 수학문제

일상 생활에서 수량을 계산할 때 어떤 수량들은 반복될 때가 많습니다. 이런 경우 쉽게 계산이 틀리군 합니다. 이제 몇가지 실례들을 고찰합시다.

실례 1. 어느 한 학급의 학생들이 체육활동에 참가하는데 23명은 달리기에 참가하고 30명은 탁구경기에 참가하였습니다. 또 12명은 달리기에도 참가하고 탁구경기에도 참가하였습니다. 이 학급에 학생이 모두 몇명 있겠

습니까?

따져보기와 풀기

어떤 학생들은 다음과 같은 산수식을 쉽게 생각할것입니다. 이 학급에는 모두

① 23+50 = 53 (명)

② 23+30+12 = 65 (명)

이라고 대답할것입니다. 그런데 이 방법은 틀립니다. 무엇때문에 틀렸는가를 따져봅시다.

달리기에 참가한 학생수, 탁구경기에 참가한 학생수, 달리기와 탁구경기에 참가한 학생수로 가릅니다. 이것들사이에는 서로 학생수가 반복됩니다. 즉 달리기에 참가한 학생들가운데는 탁구경기에 참가한 학생들도 있으며 또 탁구경기에 참가한 학생들가운데는 달리기에 참가한 학생들도 있습니다. 그러므로 학생수가 반복되였습니다. 문제를 그림을 그려서 따져봅시다.

그림 17－1로부터 알수 있는바와 같이 산수식 23+30 = 53(명)은 두 원이 표시하는 학생수를 직접 더한것과 같으며 빗선을 친 부분이 표시하는 학생수는 두번 반복되였습니다. 산수식 23+30+12=65(명)에서는 빗선을 친 부분이 표시하는 학생수가 3번 반복되였습니다. 그러므로 이 두가지 방법은 다 틀렸습니다.

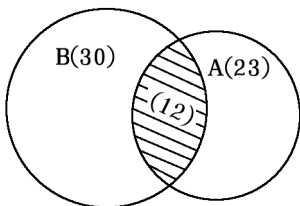



그림 17－1

문제에 맞는 관계식을 세우면 다음과 같습니다.

학급의 학생수=달리기에 참가한 학생수+탁구경기에 참가한 학생수－달리기와 탁구경기에 참가한 학생수

23+30－12= 53－12= 41 (명)

답. 이 학급에는 모두 41명의 학생이 있습니다.

이 문제를 다른 방법으로 풀수 없겠는지 생각해보십

시오.

이 실례를 통하여 어떤 량을 계산하는 과정에 어떤 량은 반복될수 있다는것을 알수 있습니다. 문제를 풀 때 반복된 량을 잘 처리하여 반복되지도 빼놓는 일도 없게 하여야 합니다. 그림을 그려 수량관계를 잘 따져 정확한 식을 찾아야 합니다.

실례 2. 100명의 대학생이 있는데 그중에서 10명은 영어와 로어를 모르며 75명은 영어를 알고 83명은 로어를 알고있습니다. 영어도 알고 로어도 아는 대학생은 몇명입니까?

따져보기 이 100명의 학생을 다음과 같이 가를수 있습니다.

영어를 아는 대학생, 로어를 아는 대학생, 영어도 알고 로어도 아는 대학생, 영어도 로어도 모르는 대학생으로 가를수 있습니다. 그림을 그려 이 문제를 풀어봅시다.

그림 17-2에서 직4각형은 대학생수를 표시하고 A는 영어를 아는 대학생들을 표시하며 B는 로어를 아는 대학생들을 표시합니다. 빗선을 친 부분은 영어도 알고 로어도 아는 대학생수를 표시합니다. 두 원밖에 있는 직4각형안의 부분은 영어도 모르고 로어도 모르는 대학생수를 표시합니다.

그림으로부터 알수 있는바와 같이 영어를 알거나 또는 로어를 아는 대학생수 즉 적어도 한가지 외국어를 아는 대학생은

$$100-10=90\text{ (명)}$$

입니다.

영어를 알거나 또는 로어를 아는 대학생수=영어를 아는 대학생수 +로어를 아는 대학생수－영어도 알고 로어도 아는 대학생수

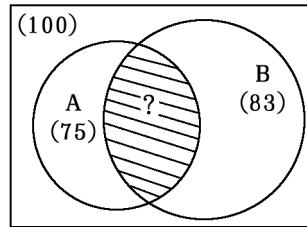



그림 17-2

거꿀계산관계에 의하여 다음과 같은 사실을 알수 있습니다.

영어도 알고 로어도 아는 대학생수 = 영어를 아는 대학생수+로어를 아는 대학생수－영어를 알거나 또는 로어를 아는 대학생수

풀기 ① 영어를 알거나 또는 로어를 아는 대학생수

$$100-10=90\ (명)$$

② 영어도 알고 로어도 아는 대학생수

$$75+83-90=158-90=68\ (명)$$

종합하면

$$75+83-(100-10)=68\ (명)$$

답. 영어도 알고 로어도 아는 대학생은 68명입니다.

실례 3. 한변의 길이가 90cm인 바른4각형모양의 책상우에 변의 길이가 각각 20cm와 45cm인 바른4각형모양의 종이 2장을 그림과 같이 놓았습니다 (그림 17－3). 종이가 덮이지 않은 책상부분의 면적을 구하십시오.

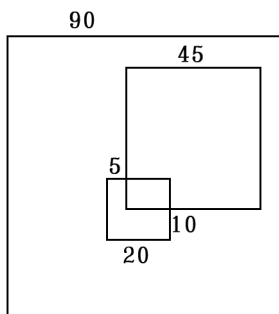



그림 17－3

따져보기 그림으로부터 알수 있는바와 같이 책상우에는 서로 다른 두장의 종이가 겹쳐 있습니다.

먼저 두장의 종이가 덮고있는 책상의 면적을 구한 다음 책상의 총 면적에서 덮이운 면적을 덜어내면 됩니다.

풀기 ① 책상의 총 면적

$$90\times90=8100\ (cm^2)$$

② 책상우의 종이가 덮고있는 면적

$$45\times45+20\times20-(20-10)\times(20-5)$$
$$=2025+400-150=2275\ (cm^2)$$

③ 종이가 덮이지 않은 책상의 면적

$$8100-2275=5825\ (\mathrm{cm}^2)$$

종합하면

$$\begin{aligned}&90\times90-[45\times45+20\times20-(20-10)\times(20-5)]\\&=8100-(2025+400-150)\\&=8100-2275=5825\ (\mathrm{cm}^2)\end{aligned}$$

답. 종이가 덮이지 않은 책상면적은 5825 cm^2입니다.

실례 4. 한 학교에서 달리기, 너비뛰기, 수류탄던지기의 세 경기를 조직하였습니다. 달리기에 모두 42명 참가하고 너비뛰기경기에 모두 51명이 참가하였으며 수류탄던지기경기에 모두 30명이 참가하였습니다. 달리기와 너비뛰기에 다 참가한 학생은 13명이며 동시에 달리기와 수류탄던지기에 참가한 학생은 7명, 너비뛰기와 수류탄던지기에 참가한 학생은 11명입니다. 이 세 경기에 모두 참가한 학생은 3명입니다. 이 체육경기에 참가한 학생은 모두 몇명입니까?

따져보기 그림을 그리면 그림 17－4와 같습니다.

달리기에 참가한 학생수를 A원 (42명), 너비뛰기에 참가한 학생수를 B원 (51명), 수류탄던지기에 참가한 학생수를 C원 (30명)으로 표시합니다.

쉽게 가려볼수 있게 하기 위하여 그림의 매 구역에 번호를 달았습니다. 이 7개 구역이 겹치지 않는 부분은 서로 다른 경기종목에 참가한 학생수를 표시합니다.

그림 17－4

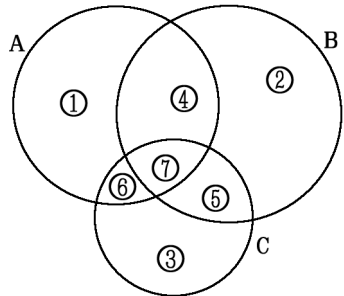
물론 구역 ④, ⑦은 달리기와 너비뛰기에 참가한 학생수 (13명)를 표시하고 구역 ⑥, ⑦은 달리기와 수류탄던지기에 참가한 학생수 (7명), 구역 ⑤, ⑦은 너비뛰기와 수

류탄던지기에 참가한 학생수 (11명), 구역 ⑦은 세 경기에 모두 참가한 학생수(3명)를 표시합니다.

그림 17－4에서 보는 바와 같이 이번 체육경기에 참가한 학생수는 다음과 같습니다.

체육경기에 참가한 학생수 = 달리기에 참가한 학생수+너비뛰기에 참가한 학생수+수류탄던지기에 참가한 학생수－달리기와 너비뛰기에 참가한 학생수－너비뛰기와 수류탄던지기에 참가한 학생수+세 경기에 모두 참가한 학생수

풀기 1: 체육경기에 참가한 학생수는

$$42+51+30-13-7-11+3=95\ (명)$$

입니다.

이런 문제를 푸는데서 중요한것은 반복되는 부분을 층별로 가르고 어느 량을 남기고 어느 량을 버려야 하는가를 명백히 밝히는것입니다.

따져보기 2: 구역 ④는 달리기와 너비뛰기의 두가지 경기에 참가한 학생수를 표시합니다. 즉 13－3=10 (명)입니다. 구역 ⑥은 달리기와 수류탄던지기의 두 경기에 참가한 학생수 즉 7－3=4 (명)을 표시합니다. 구역 ⑤는 너비뛰기와 수류탄던지기의 두 경기에 참가한 학생수 즉 11－3=8 (명)을 표시합니다. 구역 ①은 달리기경기에만 참가한 학생수 즉 42－10－4－3=25 (명)을 표시합니다. 구역 ②는 너비뛰기경기에 참가한 학생수 즉 51－10－8－3=30 (명)을 표시합니다. 구역 ③은 수류탄던지기경기에만 참가한 학생수 즉 30－8－4－3=15 (명)을 표시합니다.

매 구역에 포함되여있는 학생수를 더하면 구하려는 학생수가 됩니다.

풀기 2: 25+30+15+10+8+4+3 = 95명

답. 체육경기에 참가한 학생은 모두 95명입니다.

실례 5. 1~500까지의 모든 자연수중에서 2로 완제되지 않으며 또 3으로도, 5으로도 완제되지 않는 수가 모두

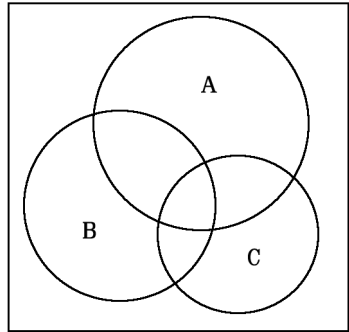
몇개 있겠습니까?

따져보기 일부 학생들은 500개의 자연수중에서 각각 2, 3, 5의 배수를 덜면 되는것으로 생각할수 있습니다. 그러나 이 문제를 이런 방법으로 풀면 안됩니다. 2, 3, 5의 배수들은 서로 반복되므로 그 관계를 명백히 밝혀야 합니다. 그림을 그려서 따져봅시다.

그림 17—5에서 직4각형은 1~500까지의 모든 자연수의 개수를 표시합니다.

그림 17—5

둘씩 사귀는 3개의 원 A, B, C를 그렸을 때 그의 공통부분은 각각 1~500가운데서 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수들의 개수를 표시합니다.

직4각형안에서 원의 바깥부분은 2로도, 3으로도, 5로도 완제되지 않는 수의 개수를 표시합니다.

먼저 세 원안에 있는 개수 즉 1~500까지에서 2로 완제되고 또 3으로도, 5로도 완제되는 수의 개수를 계산한 다음 500에서 이 수를 덜면 구하려는 수가 얻어집니다.

2 또는 3 또는 5로 완제되는 수의 개수=2로 완제되는 수의 개수+3으로 완제되는 수의 개수+5로 완제되는 수의 개수—2로도, 3으로도 완제되는 수의 개수—2로도, 5로도 완제되는 수의 개수—3으로도, 5로도 완제되는 수의 개수 +2로도, 3으로도, 5로도 완제되는 수의 개수

풀기 1~500까지에서 2, 3, 5로 완제되는 수의 개수는

$$\left[\frac{500}{2}\right]+\left[\frac{500}{3}\right]+\left[\frac{500}{5}\right]-\left[\frac{500}{2\times3}\right]-\left[\frac{500}{2\times5}\right]-\left[\frac{500}{3\times5}\right]+\left[\frac{500}{2\times3\times5}\right]$$

$$=250+166+100-83-50-33+16=366\ (개)$$

그러므로 1~500까지에서 수 2로 완제되지 않고 5으로

도 완제되지 않는 수는 모두

$$500-366=134\ (개)$$

입니다.

답. 134개입니다.

이 5개의 실례를 통하여 이러한 문제들은 다음과 같은 특성이 있다는것을 알수 있습니다.

① 문제에 있는 두개의 량 또는 몇개의 량이 서로 포함되는 관계 즉 A에 B가 있고 B에 A가 있는 경우, 서로 교체되거나 반복되는 현상

② 문제를 풀 때 반복되는 량에 주의하여 어느 량은 요구되고 어떤 량은 요구되지 않는가를 잘 갈라보아야 합니다. 이런 의미에서 이 문제를 《포함과 배제문제》또는 《포함배제문제》라고 부릅니다.

③ 문제를 풀 때 조건에서 복잡성을 피하기 위하여 반복되거나 빼놓는 일이 없어야 하며 수량관계를 직관적으로 알수 있도록 그림을 그려보아야 합니다.

이밖에 문제를 풀 때 다음과 같은 풀기순서를 지키는것이 좋습니다.

① 문제의 조건에 의하여 문제에서 준 수량관계를 그 특성에 따라 분류합니다.

② 분류한것을 그림으로 표시하고 그림의 매 구역에 그 개수를 표시합니다.

③ 주어진 조건에 의하여 그림의 도움을 받아 수량사이의 관계를 련관시켜 계산식을 만듭니다.

련습 17

1. 수 150을 넘지 않는 자연수들에서 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수는 몇개입니까?

2. 어느 한 학교에 960명의 학생이 있는데 그중에서 510명은 《청년전위》신문을 보고 330명은 《소년과학》

을 보며 120명은 《소년신문》을 봅니다. 전체 학생중에서 270명은 두가지를 보고 58명은 세가지를 다 봅니다. 이 학교 학생들중에서 잡지나 신문을 보지 않는 학생은 몇명이겠습니까?

3. 50송이의 꽃송이중에서 16송이는 국화이고 15송이는 봉선화, 21송이는 백일홍입니다. 또한 7송이중에 국화도 있고 봉선화도 있으며 8송이중에는 봉선화도 있고 백일홍도 있습니다. 그리고 10송이중에는 백일홍도 있고 국화도 있으며 5송이중에는 국화, 봉선화, 백일홍이 다 있습니다. 50송이의 꽃송이중에 국화, 봉선화, 백일홍이 각각 몇송이씩 있겠습니까?

4. 그림 17－6에 면적이 36cm²인 원이 3개 있는데 둘씩 사귀는 부분의 면적은 각각 7cm², 8cm², 9cm²이며 세 원이 사귀는 부분의 면적은 3cm²입니다. 전체 도형의 면적을 구하십시오.

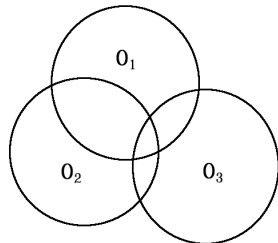



그림 17－6

5. 몇가지 기하도형이 그려진 종이쪼각을 그림 17－7과 같이 책상우에 놓았습니다. 바른4각형과 직4각형, 3각형, 원의 면적은 각각 20 cm², 30 cm², 10 cm², 18 cm²이고 바른4각형과 직4각형의 사귀는 부분의 면적은 7.5 cm²이며 바른4각형과 3각형이 사귀는 면적은 2.5 cm², 바른4각형과 원이 사귀는 부분의 면적은 4 cm², 직4각형과 3각형이 사귀는 부분의 면적은 4.5 cm², 직4각형과 원이 사귀는 부분의 면적은 3.2 cm²입니다. 바른4각형, 직4각형, 3각형이 사귀는 부분의 면적은 1.2cm²이며 바른4각형, 직4

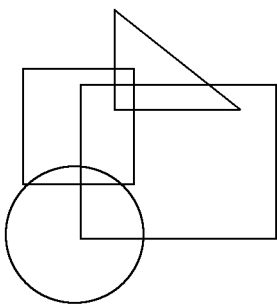



그림 17－7

각형, 원이 사귀여서 만드는 부분의 면적은 1.5 cm^2입니다. 전체 도형이 차지하는 면적은 얼마입니까?

6. 1부터 1,000까지의 자연수중에서 5의 배수, 6의 배수, 7의 배수, 11.의 배수가 아닌 수는 몇개입니까?

답

1. 80개 2. 212명 3. 18송이

4. $36\times3-7-8-9+3 = 87\ cm^2$

5. $20+30+10+18-7.5-2.5-4-4.5-3.2+1.2+1.5 = 59cm^2$

6. 520개

이 책에는 학생들의 지능을 계발시켜주기 위한 문제들로서 산수식에 들어있는 빈칸에 어떤 수를 넣어야 성립되겠는가, 복잡한 도형은 어떻게 세며 평균값이란 무엇인가, 수렬문제, 배길문제, 자리올림법, 더하기원리, 곱하기원리 등 현실과 결부된 수학문제들이 서술되여있다.

이 책은 보통교육부문 학생들을 위한 참고서로 출판한다.

풀수록 재미나는 수학문제풀이 2

집필 교수 윤인철　　심사 부교수 학사 위승주
학사 김분희
편집 최남숙
장정 리승일　　교정 서은희

낸 곳 외국문도서출판사
인쇄소 인민대학습당인쇄공장
인쇄 주체94(2005)년 3월 10일 발행 주체94(2005)년 3월 20일

교04－1212　10,000 부　값200원